synthèse autour des vecteurs

Caractérisation d'un vecteur du plan

Un vecteur est un objet mathématique abstrait caractérisable par trois paramètres :

- sa direction,
- son sens, et
- sa norme.

Translation et vecteur

La transformation du plan qui associe à un point A un point B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Notation

La notation $\overrightarrow{AB}$ désigne un vecteur dirigé du point A (origine) vers le point B (extrémité). Sa norme ou longueur est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$. Il s'agit simplement de la distance AB.

La notation $\vec{u}$ désigne un vecteur dont la norme est notée $\|\vec{u}\|$.

Les notations $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$, par exemple, peuvent désigner un même vecteur. Dans ce cas, on écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ sont trois représentants distincts d'un même vecteur.

On notera par exemple : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ car le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a mêmes direction et norme que le vecteur $\overrightarrow{BA}$ mais sens contraire.

Écrire que $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB}$ revient à dire que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même sens et même direction, mais que la norme de $\vec{u}$ est trois fois plus grande que la norme de $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés

- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.
- Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ revient à dire que les segments [AD] et [BC] ont même milieu.

Somme de deux vecteurs

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, associe au point A le point B, puis au point B le point C. On dit qu'il s'agit de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Cette translation n'est rien d'autre que la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Cette relation est appelée **relation de Chasles**.

Deux vecteurs particuliers : $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont tous deux une norme (longueur) égale à 1 unité.

$\vec{\imath}$ est horizontal et dirigé de la gauche vers la droite.

$\vec{\jmath}$ est vertical et dirigé du bas vers le haut.

On dit que $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ est une base orthonormée de vecteurs du plan.

Décomposition d'un vecteur

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'exprime d'une manière unique à l'aide des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

On dit que : $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

On a donc, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, x et y étant appelées coordonnées vectorielles du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

On écrit : $\vec{u}$ a pour coordonnées vectorielles $\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Cordonnées d'un vecteur

Soient A et B deux points de cordonnées cartésiennes connues dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées vectorielles $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Soit M un point de cordonnées cartésiennes $(x; y)$ connues dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées vectorielles $\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

On a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Vecteurs et règles de calcul sur les coordonnées

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Pour déterminer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, on écrira :

$$\vec{u} + \vec{v} = \binom{x}{y} + \binom{x'}{y'} = \binom{x + x'}{y + y'}$$

Pour déterminer les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$, on écrira :

$$\vec{u} - \vec{v} = \binom{x}{y} - \binom{x'}{y'} = \binom{x - x'}{y - y'}$$

Pour déterminer les coordonnées de $3\vec{u}$, on écrira :

$$3\vec{u} = 3\binom{x}{y} = \binom{3x}{3y}$$

Pour déterminer les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$, on écrira :

$$2\vec{u} - \vec{v} = 2\binom{x}{y} - \binom{x'}{y'} = \binom{2x - x'}{2y - y'}$$

Enfin dire que : $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à dire que $\binom{x}{y} = \binom{x'}{y'}$, c.-à-d. $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$