

vecteurs et colinéarité

déterminant

Définition - Déterminant de deux vecteurs du plan.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis par rapport à une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ l'expression $det(\vec{u}, \vec{v})$ où

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Exercice 1

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer $det(\vec{u}, \vec{v})$, $det(\vec{u}, \vec{w})$ et $det(\vec{v}, \vec{w})$.

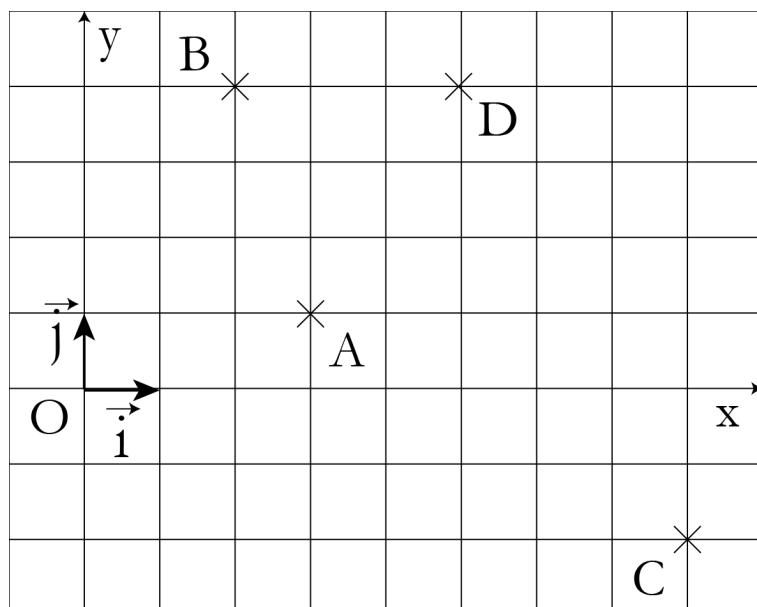
Exercice 2

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer $det(\vec{u}, \vec{v})$, $det(\vec{u}, \vec{w})$ et $det(\vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 3

1. Déterminer les coordonnées vectorielles des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{CD} représentés ci-dessous.



2. Déterminer $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$ et $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

colinéarité

Définition - Colinéarité de deux vecteurs non nuls du plan.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

On dit que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k (non nul) tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriété

Lorsque deux vecteurs sont colinéaires, les droites dirigées par ces deux vecteurs sont parallèles.

Exercice 4

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

Exercice 5

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

déterminant et colinéarité

Propriété

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

C'est-à-dire $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

Exercice 6

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

1. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont-ils colinéaires ?
3. Les vecteurs \vec{v} et \vec{w} sont-ils colinéaires ?

Parallélisme et colinéarité

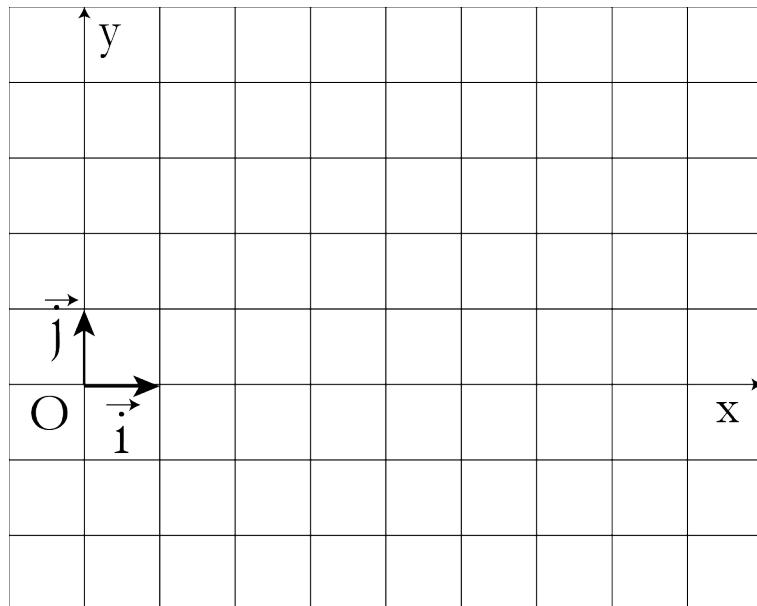
Propriété

Soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} deux vecteurs définis dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) .

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

Exercice 7

Soient A(2 ; 3), B(1 ; -1), C(3 ; -2) et D(5 ; 5) définis dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer l'ordonnée y_E du point E(3 ; y_E) tel que (AB) // (ED).

Alignement et colinéarité

Propriété

Soient A, B et C trois points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exercice 8

Soient A(0 ; -2), B(4 ; 1/2) et C(9 ; 4) définis dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

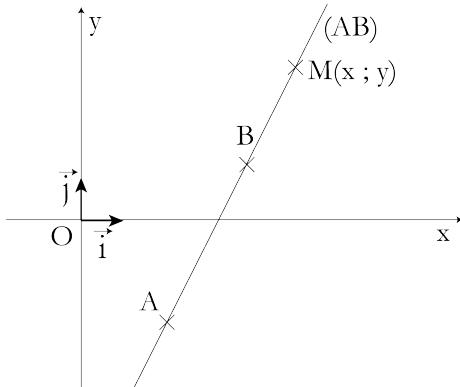
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Équation de droite

Propriété

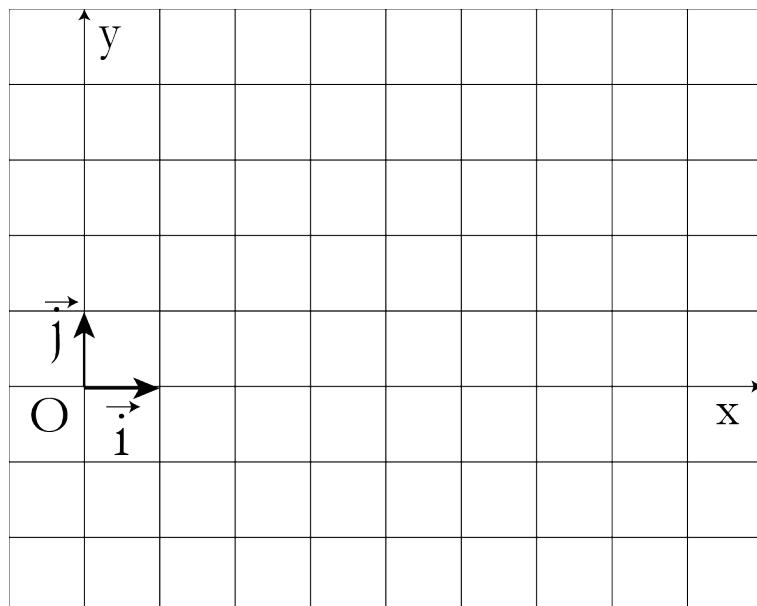
Soient A, B deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M de la droite (AB), les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AM} sont colinéaires, c'est-à-dire que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$.



Exercice 9

Soient A(3 ; -2) et B(1 ; 2) deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. En déduire l'équation réduite unique de la droite (AB).
3. Préciser la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite (AB).

Exercice 10

Soient A(-1 ; 4) un point du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$ un vecteur directeur de la droite (D) passant par A. Déterminer l'équation réduite de (D).

Déterminant et aire

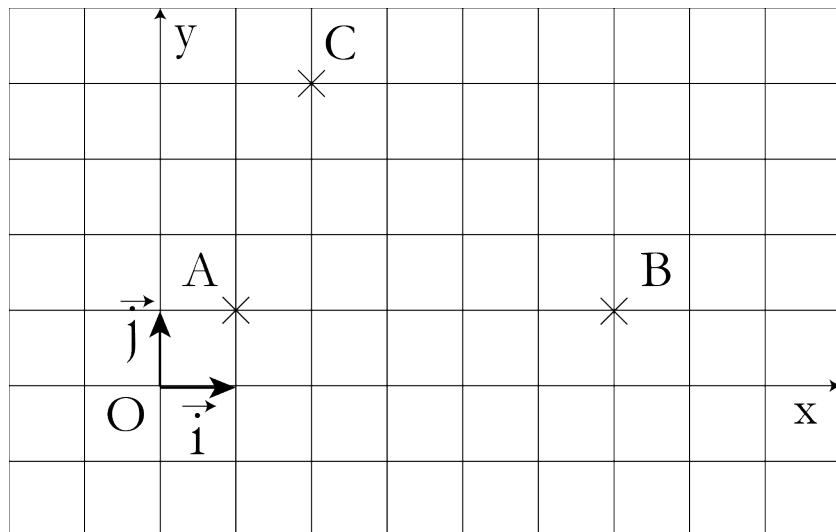
Propriété

Soient A, B et C trois points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La valeur absolue du déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} est égale à l'aire du parallélogramme formé par les côtés [AB] et [AC].

Exercice 11

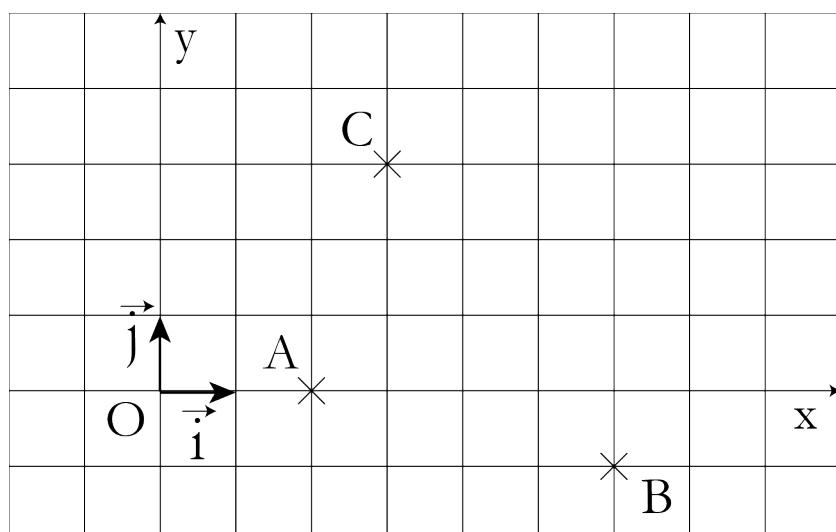
On considère la figure ci-dessous :



Déterminer l'aire du parallélogramme formé par les côtés [AB] et [AC].

Exercice 12

On considère la figure ci-dessous :



Déterminer l'aire du parallélogramme formé par les côtés [AB] et [AC].