exercices de synthèse

sur les vecteurs

exercice 6

On considère dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les points $C(-2;-5)$ et $D(4;4)$.

Déterminons une équation de la droite (CD).

méthode vectorielle

Soit M un point du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$.

Déterminons $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$.

On a : $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+5 \end{pmatrix}$.

De plus : $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 4-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\vec{u}$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des **vecteurs directeurs** de la droites (CD).

Pour tout point du plan, dire que $M \in (CD)$ revient à dire que $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Cela revient aussi à dire que $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Déterminons une équation cartésienne de la droite (CD).

$\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{CM},\vec{u}\,) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y+5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$3(x+2) - 2(y+5) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 - 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 = 0$

En résultat, l'équation $3x - 2y - 4 = 0$ est une **équation cartésienne** de la droite (CD).

De plus : $3x - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 2y \Leftrightarrow 2y = 3x - 4 \Leftrightarrow y = \frac{3x-4}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$

En conséquence, l'**équation réduite** de la droite (CD) est : $y = \frac{3}{2}x - 2$.

La pente de la droite est égale à $\frac{3}{2}$.

L'ordonnée à l'origine est égale à -2. C'est-à-dire que la droite (CD) passe pat le point de coordonnées $(0\ ;\ -2)$.

Méthode analytique **Indispensable**

Soient $C(-2;-5)$ et $D(4;4)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminons l'équation réduite de la droite (CD).

L'équation réduite de la droite (CD) s'écrit sous la forme $y = mx + p$.

Déterminons m.

On a : $m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{4+5}{4+2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Déterminons p.

$D(4;4) \in (CD)/y = \frac{3}{2}x + p$, donc : $4 = \frac{3}{2}(4) + p$, d'où : $4 = 6 + p$.

En résultat : $p = -2$.

Conclusion : l'équation réduite de la droite (CD) est : $y = \frac{3}{2}x - 2$.

Méthode analytique - variante

Soient $C(-2;-5)$ et $D(4;4)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminons l'équation réduite de la droite (CD).

L'équation réduite de la droite (CD) s'écrit sous la forme $y = mx + p$.

$C(-2;-5) \in (CD)/y = mx + p$, donc : $-5 = m(-2) + p$, d'où : $-5 = -2m + p$.

$D(4;4) \in (CD)/y = mx + p$, donc : $4 = m(4) + p$, d'où : $4 = 4m + p$.

Résolvons le système $\begin{cases} -2m + p = -5 \\ 4m + p = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2m + p = -5 \\ 4m + p = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m = 9 \\ p = 4 - 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \\ p = 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = 4 - 6 = -2 \end{cases}$$

Conclusion : l'équation réduite de la droite (CD) est : $y = \frac{3}{2}x - 2$.

Méthode élémentaire

Soient $C(-2;-5)$ et $D(4;4)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminons l'équation réduite de la droite (CD).

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque de la droite.

Quelle que soit les deux points à partir desquels on calcule la pente m de la droite, la pente est la même car l'inclinaison de la droite est constante.

Autrement dit : $m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{4+5}{4+2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ (relation 1)

Mais : $m = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{y-(-5)}{x-(-2)} = \frac{y+5}{x+2}$ (relation 2)

D'après les relations ci-dessus, on a donc : $\frac{y+5}{x+2} = \frac{3}{2}$

D'où : $y + 5 = \frac{3}{2}(x + 2)$

Donc : $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}(2) - 5$

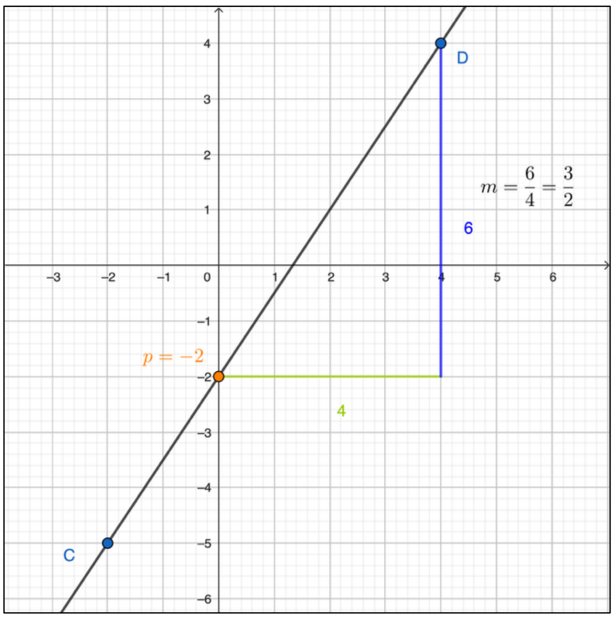
C'est-à-dire : $y = \frac{3}{2}x + 3 - 5$

Enfin : $y = \frac{3}{2}x - 2$ ← Équation réduite de la droite (CD).

Méthode graphique

Soient $C(-2;-5)$ et $D(4;4)$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminons l'équation réduite de la droite (CD).



D'après la figure, l'équation réduite de la droite (CD) est : $y = \frac{3}{2}x - 2$.