exercices de synthèse

sur les vecteurs

exercice 5

On considère dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points $A(0; 3)$ et $B(2; 9)$.

Soit M un point du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$.

1. Déterminons $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

   On a : $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - 3 \end{pmatrix}$.

   De plus : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 9 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont tous appelés **vecteurs directeurs** de la droites (AB)**.** Ils sont colinéaires.

2. Dire que $M \in (AB)$ revient à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

   Cela revient aussi à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

3. Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).

   $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\,) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ y - 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x - (y - 3) = 0$

   $\Leftrightarrow 3x - y + 3 = 0$

   L'équation $3x - y + 3 = 0$ est appelé **équation cartésienne** de la droite (AB).

   Cours : Une équation cartésienne de droite s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$.

   Dire qu'une droite (D) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ revient à dire que tous les points de la droite ont une abscisse x et une ordonnée y qui vérifient cette équation.

   L'équation $3x - y + 3 = 0$ de la droite (AB) est une relation que vérifient les coordonnées de tous les points de la droite (AB). Cette équation définit une famille de points, tous alignés, liés entre eux par cette relation (appelée équation) entre coordonnées.

   • Éléments de compréhension autour de l'équation $3x - y + 3 = 0$ de la droite (AB)

   Examinons les points $A(0; 3)$ et $B(2; 9)$.

   Posons $R = 3x - y + 3$.

   Pour le point A, on a : $x = 0$ et $y = 3$. D'où : $R = 3(0) - 3 + 3 = 0$. Les coordonnées $(0; 3)$ du point A vérifient l'équation $3x - y + 3 = 0$. Donc $A \in (AB)$, ce qui était évident.

   Pour le point B, on a : $x = 2$ et $y = 9$. D'où : $R = 3(2) - 9 + 3 = 9 - 9 = 0$. Les coordonnées $(2; 9)$ du point B vérifient l'équation $3x - y + 3 = 0$. Donc $B \in (AB)$, chose là aussi évidente.

Imaginons que le point $C(5; y_C)$, point dont on ignore l'ordonnée y_C, appartienne à la droite (AB). Ses deux coordonnées doivent vérifier l'égalité stipulée par l'équation $3x - y + 3 = 0$.

On doit donc avoir : $3(5) - y_C + 3 = 0$, d'où : $15 - y_C + 3 = 0$. Donc : $18 - y_C = 0$.

En résultat : $y_C = 18$.

Le point C d'abscisse 5, appartenant à la droite (AB), doit obligatoirement avoir pour ordonnée y_C le nombre 18.

Imaginons maintenant que le point $D(x_D; -3)$ appartienne à la droite (AB). Ses deux coordonnées vérifiant obligatoirement l'égalité stipulée par l'équation $3x - y + 3 = 0$, on doit avoir : $3(x_D) - (-3) + 3 = 0$, d'où : $3x_D + 6 = 0$. Donc : $3x_D = -6$.

En résultat : $x_D = -\frac{6}{3} = -2$.

Le point D d'ordonnée -3, appartenant à la droite (AB), doit obligatoirement avoir pour abscisse x_D le nombre -2.

4. Déterminons l'équation réduite de la droite (AB).

   $3x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x + 3 = y \Leftrightarrow y = 3x + 3$

   L'équation $y = 3x + 3$ est appelée équation réduite de la droite (AB).

   Cours : L'équation réduite d'une droite s'écrit sous la forme $y = ax + b$.

   a est appelé pente de la droite ; ce coefficient est égal à la tangente de l'angle d'inclinaison de la droite.

   b est appelé ordonnée à l'origine de la droite ; b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe (Oy).

5. A l'aide des hypothèses de l'énoncé, il était immédiat de voir que l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) était 3.

   En effet, le point $A(0; 3)$ qui appartient à la droite, a pour ordonnée 3 en 0, c'est-à-dire à l'origine. Donc l'équation réduite de la droite (AB) s'écrit : $y = ax + 3$.

   De plus, $\overrightarrow{AB}\binom{2}{6}$ est un vecteur directeur de la droite.

   Ce vecteur indique que, quand on avance de 2, on monte de 6. La pente est par conséquent égale à $\frac{6}{2} = 3$.

   L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit : $y = 3x + 3$.

Elle est pas belle la vie ?