

exercices de synthèse

sur les vecteurs

exercice 1

On considère dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(3; 1)$, $B(1; 5)$ et $C(-4; 2)$.

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{BC} .

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De plus : } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Enfin : } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 1 \\ 2 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons AB .

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

3. Déterminons les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

$$\text{I a pour coordonnées } \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right), \text{ c'est-à-dire : } \left(\frac{3+1}{2}; \frac{1+5}{2} \right), \text{ donc : } (2; 3).$$

4. Déterminons les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 3 \\ y_D - 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D - 3 \\ y_D - 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 3 = -10 \\ y_D - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -10 + 3 = -7 \\ y_D = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

Conclusion : le point D a pour coordonnées $(-7; -5)$.

exercice 2

On considère dans la base orthonormé (\vec{i}, \vec{j}) les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

On veut montrer que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont deux réels.

1. Traduisons l'égalité vectorielle par un système de deux équations à deux inconnues.

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a + 2b \\ a + 3b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ a + 3b = -5 \end{cases}$$

2. Résolvons le système et exprimons \vec{w} en fonction des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ a + 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a + 6b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = -10 \\ a = -5 - 3b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b = -2 \\ a = -5 - 3(-2) = 1 \end{cases}$$

En résultat, on a : $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$.