exercices de synthèse

sur les vecteurs

exercice 1

On considère dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les points $A(3;1)$, $B(1;5)$ et $C(-4;2)$.

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

   On a : $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \binom{1-3}{5-1} = \binom{-2}{4}$.

   De plus : $\overrightarrow{AC} = \binom{x_C-x_A}{y_C-y_A} = \binom{-4-3}{2-1} = \binom{-7}{1}$.

   Enfin : $\overrightarrow{BC} = \binom{x_C-x_B}{y_C-y_B} = \binom{-4-1}{2-5} = \binom{-5}{-3}$.

2. Calculons AB.

   $AB = \sqrt{(-2)^2+(4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

3. Déterminons les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

   I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire : $\left(\frac{3+1}{2};\frac{1+5}{2}\right)$, donc : $(2;3)$.

4. Déterminons les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

   On a : $\overrightarrow{AD} = \binom{x_D-x_A}{y_D-y_A} = \binom{x_D-3}{y_D-1}$.

   $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \binom{x_D-3}{y_D-1} = 2\binom{-5}{-3} = \binom{-10}{-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-3=-10 \\ y_D-1=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-10+3=-7 \\ y_D=-6+1=-5 \end{cases}$

   Conclusion : le point D a pour coordonnées $(-7;-5)$.

exercice 2

On considère dans la base orthonormé $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{1}$, $\vec{v}\binom{2}{3}$ $et\ \vec{w}\binom{0}{-5}$.

On veut montrer que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont deux réels.

1. Traduisons l'égalité vectorielle par un système de deux équations à deux inconnues.

   $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Leftrightarrow \binom{0}{-5} = a\binom{4}{1} + b\binom{2}{3} = \binom{4a+2b}{a+3b} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=0 \\ a+3b=-5 \end{cases}$

2. Résolvons le système et exprimons $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   $\begin{cases} 4a+2b=0 \\ a+3b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+3b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ 2a+6b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b=-10 \\ a=-5-3b \end{cases} \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} b=-2 \\ a=-5-3(-2)=1 \end{cases}$

   En résultat, on a : $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$.