MATHS 2de

Coordination
Hélène GRINGOZ et Frédéric WEYERMANN

Auteurs
Delphine BAU
Jérémy COUTEAU
Hélène GRINGOZ
Marie HASCOËT
Didier KRIEGER
Mathieu PRADEL
Frédéric WEYERMANN

Livre du professeur

MAGNARD

Édition : Marilyn Maisongrosse, Stéphanie Herbaut, Malvina Juhel
Responsable éditorial : Adrien Fuchs
Maquette de couverture : Primo&Primo
Mise en pages et schémas : Nord-compo

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 Algorithmique et programmation

Manuel p. 12-39

I. Introduction

Objectifs du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de formaliser les notions élémentaires d'algorithmique (affectation, instructions conditionnelles, boucles, etc.) et de donner les éléments permettant leur mise en œuvre dans le langage de programmation textuel **Python**.

Ainsi, nous avons fait le choix d'activités d'introduction sur poste dont l'objectif est double :

• réactiver les notions d'algorithmique vues au cycle 4 (le langage de programmation par blocs **SCRATCH**, connu des élèves, étant proche du En langage naturel) ;

• apprendre simultanément à les « traduire » dans le langage **Python**.

Dans un deuxième temps, la notion - centrale en programmation - de fonction est introduite.

Le tout est accompagné d'exercices et TP d'algorithmique et de programmation permettant une appropriation progressive des différentes notions par l'élève.

De nombreuses activités mettant en jeu Algorithmique et programmation sont évidemment présentes.

Capacités

→ Amener les élèves à comprendre et utiliser le langage naturel et notamment les concepts de types, de conditions, de boucles et de fonctions.

→ Amener les élèves à comprendre et écrire des programmes dans le langage Python notamment en mobilisant les instructions `if/else`, `for`, `while` et `def` (pour les fonctions).

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 13

1. Appliquer un algorithme « débranché »

1. On suit les étapes suivantes à partir des trois nombres 7 ; 12 et 3, par exemple.

Étape ① : 7-12-3

Étape ② : 7-12-3

Étape ③ : 7-3-12

Étape ④ : 3-7-12

2. Les trois nombres semblent classés dans l'ordre croissant.

2. Affecter une valeur à une variable

1. Pour 5 : la valeur 7 est affichée

($2 \times 5 = 10$ puis $10 - 3 = 7$).

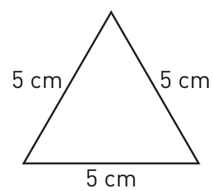
Pour -5 : la valeur -13 est affichée

($2 \times (-5) = -10$ puis $-10 - 3 = -13$).

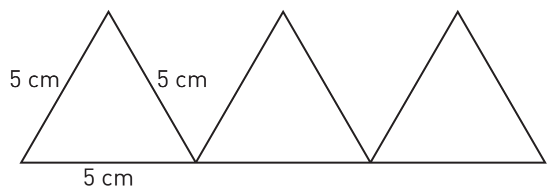
2. Ce programme permet d'afficher l'image d'un nombre par la fonction $f : x \mapsto 2x - 3$.

3. Repérer une instruction un nombre fini de fois

1. On obtient la figure suivante (le tracé se finit dans le sommet inférieur droit).



2. On obtient la figure suivante.



4. Traiter une instruction conditionnelle

1. $x = -1$ et réponse = 2 (attention, cela correspond à la deuxième affectation d'une valeur à réponse) donc réponse = $3x + 5$ car $3 \times (-1) + 5 = 2$ donc le tambour 3 est joué.

2. $x = 3$ et réponse = 4 (attention, cela correspond à la deuxième affectation d'une valeur à réponse) donc réponse $\neq 3x + 5$ car $3 \times 3 + 5 = 14$ donc le tambour 14 est joué.

3. a) Le programme demande deux nombres et joue deux types de tambour (3 ou 14) selon que le deuxième nombre rentré est égal à 3 fois le premier plus 5 ou non.

b) Le programme permet de tester si l'on sait calculer l'image d'un nombre par la fonction affine $x \mapsto 3x + 5$.

Activités p. 14-17

Activité 1. Afficher et affecter des valeurs

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir l'affectation et l'affichage avec **Python**

1. Afficher ou imprimer.

2. b) `b=3*a+5` où `a` vaut 2 donc `b` vaut `3×2+5=11` donc le **programme 1** affiche le contenu de la variable `b`.

c) Le **programme 2** affiche `b`. Les guillemets permettent d'afficher du texte donc `"b"` ne fait pas référence à la variable `b` mais au caractère (la lettre) `b`.

d) Elle permet d'afficher du texte et le contenu d'une variable successivement dans la même commande.

3. a) On a `x=5` et `y=12` puis `x=3*5+2*12=39` puis `y=5*12-12*39=-408` qui est affiché.

Activité 2. Comprendre les variables de type numérique

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir que les variables numériques sont de différents types ayant leurs spécificités.

1. Le **programme 4** affiche `60` et le **programme 5** affiche `60.0`.

2. b) De type `int`.

c) De type `int`.

d) De type `float`.

3. a) De type `int`.

c) Elle transforme `b` en une variable de type `float`.

4. Cette commande transforme `b` en une variable de type `int`. Attention cependant, ici `b` valait 7,5 qui n'est pas entier, donc `int(b)` tronque la valeur de `b` pour qu'elle corresponde bien à son nouveau type.

Remarque : dans la question **3. c**, il n'y avait pas de modification de valeur (de `int` à `float`) car un entier est également un réel.

Activité 3. Comprendre les variables de type textuel

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir le type `str`.

1. a) et **b)** On pourrait s'attendre à un affichage `30` puis `60` mais l'affichage est `30` puis `3030`.

2. L'affichage est d'abord `bonjour` et ensuite `bonjourbonjour`.

3. b) • programme 10 : `a=int(a)` transforme le « mot » `3` en l'entier `3` donc `b` vaut `6`.

• programme 11 : `a=str(a)` transforme l'entier `3` en le « mot » `3` donc `b` vaut le « mot » `33`.

• programme 12 : Il y a un message d'erreur car on ne peut pas convertir le mot `bonjour` en un entier.

Activité 4. Programmer des instructions conditionnelles

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les instructions `if` et `else` et comprendre le principe de l'indentation et des blocs sous **Python**.

2. • pour `x=-3.4`, on a `x<0` donc la condition `x>=0` n'est pas vérifiée donc le programme ne rentre pas dans le bloc correspondant mais rentre dans le bloc `else` (sinon) et affiche successivement `Le nombre est strictement négatif` puis `Son opposé est :` puis `3.4`.

• pour `x=10.8`, on a `x`$\geqslant$`0` donc la condition `x>=0` est vérifiée donc le programme rentre dans le bloc correspondant et affiche `Le nombre est positif.`. Après cela, il ne rentre pas dans le bloc `else` donc le programme s'arrête.

3. Il affiche successivement `Le nombre est strictement négatif` puis `Son opposé est :` puis `52.568`.

4. c) La dernière ligne ne fait pas partie du bloc else car elle n'est pas indentée. Ainsi, une fois la condition traitée (que `x` soit positif ou pas) et le bloc correspondant parcouru, le programme continue en affichant `–x`.

Activité 5. Programmer une boucle bornée

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir les boucles `for` et les spécificités de l'instruction `range`.

1. b) Le programme n'affiche le message que 5 fois.

2. On constate que `i` va de `1` à `5`.

3. L'**algorithme 2** correspond au programme 15.

4. `Pour i allant de a à b-1`

5. Cela ne change rien, la variable est muette.

6. a) • 3e ligne indentée : le programme afficherait 5 fois `au revoir`, à chaque passage dans la boucle pour.

• 3e ligne non indentée : le programme afficherait 1 fois `au revoir`, une fois sorti de la boucle `Pour`.

7.

```
for i in range(0,1001):
    print(i**2)
```

8. b) `Pour i allant de 0 à b-1`

c)

```
for i in range(1001):
    print(i**2)
```

Activité 6. Programmer une boucle non bornée

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les boucles `Tant que`.

2. On obtient le tableau complété suivant.

`nombre_aleatoire`	6	6	6	6	6	6
`reponse`	0	10	9	8	7	6
`nombre_essais`	0	1	2	3	4	5
`Condition reponse ≠ nombre_aleatoire`	vérifiée	vérifiée	vérifiée	vérifiée	vérifiée	non vérifiée

3. Pour s'assurer de rentrer dans la boucle puisque `nombre_aleatoire` ne peut pas être égal à `0`. On aurait pu choisir n'importe quel nombre qui n'est pas un entier entre `1` et `10`.

Activité 7. Programmer une fonction

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les fonctions avec **Python**.

1. a) La ligne 3 (il y a un `print`).

b) Non, manifestement, c'est celui de la ligne 6.

2. a) La ligne 6 est traitée en premier.

b) La fonction `calcul_tension` est définie entre les lignes 1 et 4 incluses.

c) La fonction est appelée par le programme. On exécute donc le bloc des lignes 1 à 4 où `R` a la valeur de `resistance` du programme principal et `I` a la valeur de `intensite` du programme principal.

La valeur de `U` de la fonction est alors calculée (ligne 2) puis renvoyée et affectée à la variable `tension` dans le programme principal.

À vous de jouer ! p. 24-29

1. `nom` : chaîne de caractères

`longueur1`, `longueur2` et `longueur3` : flottants

2. `matiere` : chaîne de caractères

`moyenne` : flottant

`n` : entier

3. `a` vaut 34 et `b` vaut 170.

4. `x` vaut 6, `z` vaut 11 et `y` vaut –7.

5. Si `x=5`, l'affichage est :

`2x-20 n'est pas positif`

Si `x=15` l'affichage est :

`2x-20 est positif`

6. a) Il affiche `Année bissextile`.

b) Il n'affiche rien.

7.

```
x←Valeur saisie
Si x ⩾ 0
    f(x)←x²
Sinon
    f(x)←-x³
Fin si
```

8.

```
Afficher "Saisir mot de passe"
mdp←Valeur saisie
Si mdp = 1234
    Afficher "mot de passe non sécurisé"
Sinon
    Afficher "mot de passe sécurisé"
Fin si
```

Remarque : en **Python**, il faudrait faire attention au type des variables, le plus simple étant de considérer que `mdp` est de type string et faire le test `if mdp == "1234" :`.

9. `r` prend successivement les valeurs `55`, `77` et `103`.

10. On a successivement :

- Initialisation :
  `a=0`
  `b=0`
- `i=1` :
  `a=2`
  `b=2`
- `i=2` :
  `a=4`
  `b=6`
- `i=3` :
  `a=6`
  `b=12`
- `i=4` :
  `a=8`
  `b=20`

Donc `b` vaut 20 en fin de programme.

11.

```
Pour i allant de 9 à 784
    Afficher i
Fin pour
```

12.

```
Pour i allant de 0 à 499
    Afficher 2×i+1
Fin pour
```

13.

```
somme←0
Pour i allant de 1 à 10
    x←Valeur saisie
    somme←somme+x
Fin pour
```

14. L'algorithme affiche `3` (quand `u =656`).

15. On a successivement :

- `u=5`
  `v=12`
  `i=1`
- `u=17`
  `v=27`
  `i=2`
- `u=53`
  `v=57`
  `i=3`
- `u=161`
  `v=117`
  `i=4`

Donc l'algorithme affiche 3.

16. On a successivement :

- `r=78`
  `q=0`
- `r=74`
  `q=1`
- `r=70`
  `q=2`

etc.

Après 19 passages dans la boucle, on aura `r=2` et donc `q=19` donc on sort de la boucle `Tant que` et `a=78`, `b=4`, `r=2` et `q=19`.

17. 2. L'algorithme affiche le premier entier positif dont le carré est supérieur ou égal à 1 000.

3. L'algorithme affiche `32`.

18.

```
a←5
Tant que a ⩽ 20
   a←−2×a+1
Fin tant que
Afficher a
```

19.

```
p←1
Tant que p ⩽ 1 000 000
   Afficher p
   p←p*5
Fin tant que
```

Remarque : on peut aussi comprendre l'énoncé de sort que `Afficher p` soit après `p←p*5`.

20. 1.

```
a←Valeur entière positive saisie
Tant que a < 10^100
   a←a^a
   Afficher a
Fin tant que
```

2. Si `a=1` au départ, le programme boucle à l'infini car `a` restera égal à `1` à chaque étape.

21.

```
somme←1 000
annee←2019
Tant que somme ⩽ 2 000
   somme←somme×1,02
   annee←annee+1
Fin tant que
Afficher annee
```

22. Cet algorithme affiche `3×0+5×2+1=11`.

23. `16`

24.

```
fonction moyenne2(x,y)
   moyenne←(x+y)/2
   Retourner moyenne
```

25.

```
fonction moyenne3(x,y,z)
   moyenne←(x+y+z)/3
   Retourner moyenne
```

26.

```
fonction image(x)
   y←3×x²−7×x+4
   Retourner y
```

27.

```
fonction hausse20(quantite)
   v←quantite×1,2
   Retourner v
```

Exercices d'application p. 30-32

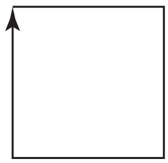
Apprendre à apprendre

28. Elles renvoient une image dans les deux cas et reçoivent une (ou des) valeur(s) pour calculer cette image.

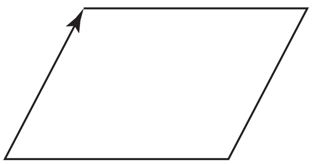
Les fonctions du chapitre 8 ont une seule « variable » (généralement x) alors que les fonctions de ce chapitre peuvent avoir plusieurs « paramètres » ou aucun.

Questions – Flash

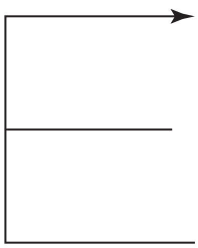
30.



31.



32.



33.

34. a)

```
#triangle équilatéral
import turtle
t = turtle.Pen()
t.forward(30)
t.left(120)
t.forward(30)
t.left(120)
t.forward(30)
```

b)

```
#M majuscule
import turtle
t = turtle.Pen()
t.left(90)
t.forward(100)
t.right(135)
t.forward(50)
t.left(90)
t.forward(50)
t.right(135)
t.forward(100)
```

c)

```
#segments parallèles
import turtle
t = turtle.Pen()
t.forward(100)
t.up()
t.right(90)
t.forward(50)
t.left(90)
t.backward(100)
t.down()
```

Déterminer le type d'une variable à partir d'un contexte

35. `nom` : chaîne de caractères

`temps` : entier

`total` : flottant

36. `nom1` et `nom2` : chaînes de caractères

`abscisse1`, `ordonnee1`, `abscisse2`, `ordonnee2` et `longueur` : flottants

Déterminer les valeurs prises par les variables d'un algorithme

37. a) `a=666`, `b=668` et `c=444888`

b) `x=-4` et `y=-36`

38. `x=31` et `y=377`

39. 1. `x=0`, `y=144` et `z=20736`

2. On peut conjecturer que `x=0` à la fin de cet algorithme, quelle que soit la valeur saisie au départ.

3. À la dernière ligne:

$x=y^2-z=(x^2)^2-x^4=x^4-x^4=0$.

40. 1.

```
Afficher "Saisir longueur"
L←Valeur saisie
Afficher "L'aire est"
Afficher L²
```

2.

```
Afficher "Saisir longueur"
c1←Valeur saisie
Afficher "Saisir largeur"
c2←Valeur saisie
Afficher "L'aire est"
Afficher c1×c2
```

41. a)

```
Afficher "longueur côté angle droit 1"
c1←Valeur saisie
Afficher "longueur côté angle droit 2"
c2←Valeur saisie
Afficher "L'hypoténuse mesure"
Afficher √(c1² + c2²)
```

b)

```
Afficher "longueur côté angle droit 1"
c1←Valeur saisie
Afficher "longueur hypoténuse"
h←Valeur saisie
Afficher "longueur côté angle droit 2"
Afficher √(h² – c1²)
```

42.

```
Afficher "Vitesse (en km/h)?"
v←Valeur saisie
Afficher "Distance (en km)?"
d←Valeur saisie
Afficher "Temps (en h):"
Afficher d/v
```

Comprendre une instruction conditionnelle

43. a) `x=-3` et `z=12`

b) `x=-3` et `z=7`

44. 1. a) L'algorithme affecte à la variable **`x`** un entier aléatoire entre `1` et `10`.

b) L'algorithme ne fait rien.

2. Dans le premier cas, l'algorithme affecte à la variable **`x`** un entier aléatoire entre `1` et `6` si **`choix=1`**, affecte à la variable **`x`** un entier aléatoire entre `1` et `10` si **`choix=2`** et ne fait rien sinon.

Dans le deuxième cas, l'algorithme affecte à la variable **`x`** un entier aléatoire entre `1` et `6` si **`choix=1`** et affecte à la variable **`x`** un entier aléatoire entre `1` et `10` dans tous les autres cas.

45. 1. a) Si `x=3` et `y=-5` alors `x×y=-15≤0` donc l'algorithme affiche: **`x et y sont de même signe`**.

b) Si `x=-7` et `y=-1` alors `x×y=7>0` donc l'algorithme affiche:

`x et y sont de signes différents.`

2. Il faut écrire `x×y<0` plutôt que `x×y>0` dans la 1re ligne.

Remarque : l'objectif principal de cet exercice est de constater qu'un algorithme peut tourner (c'est-à-dire fonctionner) mais ne pas faire ce qui en est implicitement attendu.

46. 1. a) **`x est dans l'intervalle.`**

b) **`x n'est pas dans l'intervalle.`**

2. $]2\ ;\ 7]$

47. 1. a) **`y est dans l'intervalle.`**

b) **`y n'est pas dans l'intervalle.`**

2. $]-3\ ;\ 36[$

Écrire une instruction conditionnelle

48.

```
x←Valeur saisie
Si x > 0
   Afficher 2×x
Sinon
   Afficher x³
Fin si
```

49. **1re possibilité**

```
x←Valeur saisie
Si x ⩽ 1
   Afficher 2×x+3
Sinon
   Si x < 2
      Afficher 5×x
   Sinon
      Afficher 14-2×x
   Fin si
Fin si
```

2e possibilité

```
x←Valeur saisie
Si x ⩽ 1
   Afficher 2×x+3
Fin si
Si x > 1 et x < 2
   Afficher 5×x
Fin si
Si x ⩾ 2
   Afficher 14-2×x
Fin si
```

50.

```
x←Valeur saisie
Si 5×x²+3×x-2 < 0
   Afficher "Strictement négatif"
Fin si
Si 5×x²+3×x-2>0
   Afficher "Strictement positif"
Fin si
Si 5×x²+3×x-2=0
   Afficher "Nul"
Fin si
```

Comprendre une boucle bornée

51. `1, 3, 5, …, 197, 199`

52. **1.** Il affiche:

```
1|7
2|9
3|11
4|13
5|15
6|17
7|19
8|21
9|23
10|25
```

2. C'est le tableau de valeurs de cette fonction pour x entier entre 1 et 10.

3.

```
for x in range(-1,9):
    print(x,"|",2*x**2+3*x+5)
```

53. 55

Écrire un algorithme avec une boucle bornée

54. **En langage naturel**

```
Pour i allant de 1 à 1 000
   Afficher "mathématiques"
Fin pour
```

En Python

```
for i in range(1000):
    print("mathématiques")
```

55. **En langage naturel :**

```
Pour x allant de 12 à 55
   Afficher 3x²-5
Fin pour
```

En Python

```
for x in range(12,56):
    print(3*x**2-5)
```

56. **En langage naturel**

```
Pour i allant de 0 à 333
   Afficher 3×i
Fin pour
```

En Python :

```
for i in range(334):
    print(3*i)
```

57. 1. En langage naturel

```
a←Valeur saisie
Pour i allant de 2 à 10
    a←a/2+1/a
Fin pour
Afficher a
```

En Python

```
a=float(input("Saisir a>0 :"))
for i in range(2,11):
    a=a/2+1/a
print(a)
```

3. De $\sqrt{2}$ (c'est la méthode de Héron).

Comprendre un algorithme avec une boucle bornée

58. $u \approx -5618{,}55$ en fin d'algorithme.

59. 4

60. Il va boucler à l'infini car `a²+1` sera toujours strictement positif.

Écrire un algorithme avec une boucle non bornée

61. En langage naturel

```
j←0
Tant que j ⩽ 200
    j←3×j+5
Fin tant que
Afficher j
```

En Python

```
j=0
while j<=200:
    j=3*j+5
print(j)
```

62. En considérant les différences, on constate qu'elles sont égales à 1, 2, 3, 4 et 5.

En langage naturel

```
x←4
i←1
Tant que x < 100
    x←x+i
    i←i+1
Fin tant que
Afficher x
```

En Python:

```
x=4
i=1
while x<=100:
    x=x+i
    i=i+1
print(x)
```

Utiliser une fonction simple

63. `f` retourne `17` ($3 \times 2^2 + 5$).

64. `g` retourne `8` (car $y = 1^2 + 3 = 4$ puis $z = 4 \times 1 + 4 = 8$).

Remarque : la dernière affectation `y←z²` est inutile.

Écrire une fonction simple

65. a)

```
fonction f(x)
    y←-25×x+12
    Retourner y
```

b)

```
fonction g(x)
    y←8×x³+5×x²-4×x+1
    Retourner y
```

66.

```
fonction h(x,y)
    z ←3×x×y-5×x+2×y
    Retourner z
```

Calculs et automatismes

67. 96 (100 moins 1, 2, 3 et 4)

68. 11

69. Jusqu'à ce que **i⩾35**.

Exercices bilan p. 33

70. Quel retour ?

L'affichage est **5**.

71. Au tableur !

En langage naturel :

```
fonction MIN(a,b)
   Si a > b
      m←b
   Sinon
      m←a
   Fin si
   Retourner m
```

```
fonction MAX(a,b)
   Si a > b
      M←a
   Sinon
      M←b
   Fin si
   Retourner M
```

En Python :

```
def MIN(a,b):
    if a>b:
        m=b
    else:
        m=a
    return m
```

```
def MAX(a,b):
    if a>b:
        M=a
    else:
        M=b
    return M
```

72. Valeur absolue

En langage naturel :

```
fonction valeur_absolue(x)
   Si x⩾0
      va←x
   Sinon
      va←-x
   Fin si
   Retourner va
```

En Python :

```
def valeur_absolue(x):
    if x>0:
        va=x
    else:
        va=-x
    return va
```

73. Hausse et évolution et quantité

1. En langage naturel :

```
fonction hausse5(quantite)
   Retourner quantite×1,05
```

En Python :

```
def hausse5(quantite):
    return quantite*1.05
```

2. En langage naturel :

```
fonction hausse40(quantite)
   Retourner quantite×1,4
```

En Python :

```
def hausse40(quantite):
    return quantite*1.4
```

3. En langage naturel :

```
fonction evolution(quantite,taux)
   Retourner quantite×(1+taux/100)
```

En Python :

```
def evolution(quantite,taux):
    return quantite*(1+taux/100)
```

4. Oui.

74. Pour le 26…

Il faut que `y` soit égal à 26 donc que `x` soit égal à 5 ou −5. Néanmoins, si `x=5`, l'algorithme affiche `Pas intéressant` donc −5 est la seule valeur qui convient.

75. Forfaits au choix

En langage naturel :

```
Afficher "Temps d'appel (en h) ?"
t←Valeur saisie
Si t×1,2 > 20
   Afficher "Forfait 2"
Sinon
   Afficher "Forfait 1"
Fin si
```

En Python:

```
t=float(input("Temps d'appel (en h) ?"))
if 1.2*t>20:
    print("Forfait 2")
else:
    print("Forfait 1")
```

76. Voyage en train

1. a) `15 euros`

b) `30 euros`

c) `15 euros`

2. S'il est âgé de moins de 27 ans ou plus de 60 ans.

77. À compléter

```
Pour i allant de 8 à 20
   Afficher 1/i
Fin pour
```

78. À partir d'un certain rang

En langage naturel :

```
p←Entier entre 2 et 10 saisi
i←0
Tant que p^i ⩽ 10 000
   i←i+1
Fin tant que
Afficher i
```

En Python:

```
p=int(input("Entier entre 2 et 10 : "))
i=0
while p**i<=10000:
    i=i+1
print(i)
```

79. Différence de carrés

1. En langage naturel :

```
Pour i allant de 0 à 99
  Afficher (i+1)²-i²
Fin pour
```

En Python:

```
for i in range(0,100):
    print((i+1)**2-i**2)
```

2. On obtient les nombres impairs entre 1 et 199 c'est-à-dire entre $2 \times 0 + 1$ et $2 \times 99 + 1$ (ce qui est normal car $(i+1)^2-i^2=2i+1$).

Exercices d'approfondissement

p. 34

81. À Monte-Carlo

1.

```
import random

def f1():
    x=random.uniform(-1,1)
    y=random.uniform(-1,1)
    if x**2+y**2 <= 1:
        rep=1
    else:
        rep=0
    return rep
```

2.

```
import random

def f2(n):
    p=0
    for i in range(n):
        p=p+f1()
    return 4*p/n
```

4. De π.

82. La racine encadrée

```
x←Valeur saisie
i←0
Tant que i < √x
   i←i+1
Fin tant que
Si i²=x
   Afficher i
Sinon
   Afficher i-1
   Afficher i
Fin si
```

83. En moyenne !

```
def moyenne(n):
    total=0
    for i in range(n):
        note=float(input("Saisir une note : "))
        total=total+note
    return total/n
```

84. Pour ou Tant que?

```
i←1
u←5
Tant que i ⩽ 5
   u←2×u+3
   i←i+1
Fin tant que
```

85. Suite de Syracuse

1.

```
def syracuse(n):
    print(n)
    for i in range(99):
        if n%2==0:
            n=n/2
        else:
            n=3*n+1
        print(n)
```

2. La suite finit par boucler sur 1, 2 et 4.

Remarque : le fait que cela finisse par arriver quel que soit le nombre de départ est appelé « conjecture de Syracuse » et est un problème non démontré (en 2019).

86. Un simple échange

```
a←Valeur saisie
b←Valeur saisie
c←a
a←b
b←c
```

Vers la 1re

87.

```
a=1
b=1
for i in range(998):
    x=a+b
    a=b
    b=x
print(x)
```

88. 1.

```
a←38
b←12
q←0
Tant que q×b ⩽ a
   q←q+1
Fin tant que
q←q-1
```

2.

```
def quotient(a,b):
    q=0
    while q*b<=a:
        q=q+1
    return q-1
```

3.

```
def reste(a,b):
    return(a-quotient(a,b)*b)
```

89.

```
def calories100(l,p,g):
    return l*9+p*4+g*4

l=float(input("Nombre de grammes de lipides : "))
p=float(input("Nombre de grammes de protéines : "))
g=float(input("Nombre de grammes de glucides : "))
print(calories100(l,p,g),"kcal aux 100g.")
```

Travaux pratiques p. 35-38

TP 1. Des conditions avec ET/OU

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Travailler avec les instructions **`and`** et **`or`** dans les tests avec **Python**.

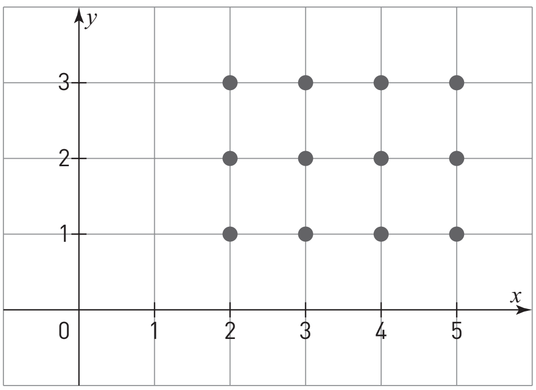
C'est aussi l'occasion de pratiquer la logique.

1. a)

```
x←entier aléatoire entre 1 et 5
y←entier aléatoire entre 1 et 5
Si x ⩾ 2 et y < 4
   Afficher "Vous avez gagné!"
Fin si
```

b) • Si `x=2` et `y=3` : il affiche `Vous avez gagné!`.
• Si `x=1` et `y=5` : il n'affiche rien.
• Si `x=2` et `y=3` : il n'affiche rien.

c)

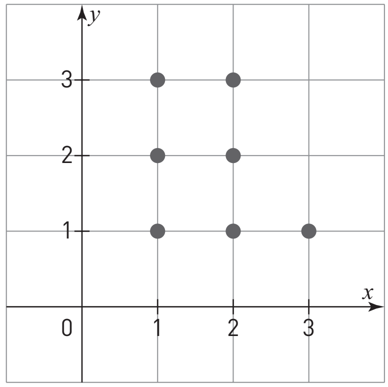


2. a)

```
x←entier aléatoire entre 1 et 3
y←entier aléatoire entre 1 et 3
Si x≠3 ou y=1
   Afficher "Vous avez gagné!"
Fin si
```

b) • Si `x=3` et `y=2` : il n'affiche rien.
• Si `x=3` et `y=1` : il affiche `Vous avez gagné!`.
• Si `x=2` et `y=3` : il affiche `Vous avez gagné!`.

c)



TP 2. Découvrir les booléens

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir les booléens et travailler la logique.

1. a) Oui.

b) `True`

c) Par exemple `5<3`.

2. c) Par exemple `b = 5==3`.

3. a) `6>10` renvoie `False` donc `c` vaut la réponse au test `False == False` qui est vérifié : `c` vaut donc `True`.

b) `11!=14` renvoie `True` et `4<7` également donc `d` vaut la réponse au test `True == True` qui est vérifiée : `d` vaut donc `True`.

4. a) Il affiche `Génial!`.

b) Il suffit par exemple d'affecter `True` à `e` en début de programme.

Remarque : chaque test renvoie un booléen `True` ou `False` c'est lui qui est évalué lors d'un test donc, si une variable `e` est de type booléen, la condition `if e` sera vérifiée ou non selon que `e` vaut `True` ou `False`. Ainsi, si `e` est de type booléen, la condition `if e` est équivalente à la condition `if e==True`.

TP 3. À propos des groupes sanguins

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Utiliser l'informatique pour simuler et observer un phénomène naturel étudié en SVT, la dérive génétique.

A. 1.

```
import random
x=random.randint(0,2)
if x==2:
    print("2 allèles transmis.")
else:
    print(x,"allèle transmis.")
```

2. a) On obtient par exemple 1, 2, 2 et 2 : à la génération n°1, il y a donc 1+2+2+2=7 allèles A.

b) Par exemple, pour l'allèle B : 1+0+1+0=2 donc il y a 2 allèles B à la génération n°1 et pour l'allèle O 1+2+0+1=4 donc il y a 4 allèles O à la génération n°1.

Cela donne :

Génération	Eff. A	Eff. B	Eff. O
n° 0	4	4	4
n° 1	7	2	4

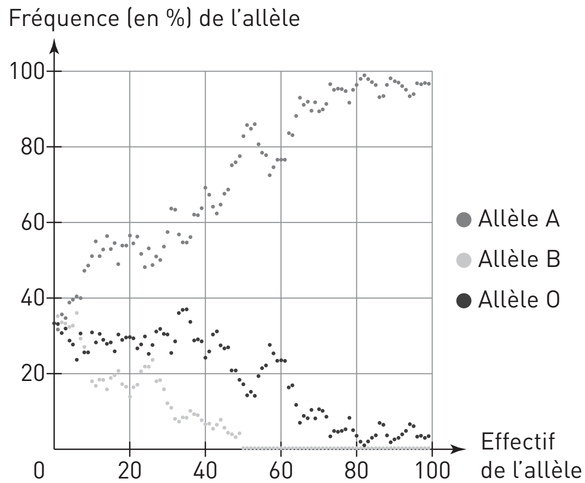
3. On réitère le processus. Dans l'exemple précédent il faut lancer 7 fois le programme (et additionner les résultats obtenus) pour connaître l'effectif de l'allèle A à la génération n° 2, 2 fois pour connaître l'effectif de l'allèle B et 4 fois pour connaître l'effectif de l'allèle O.

4. a)

```
import random
effectif = input("Effectif de l'allèle?")
effectif = int(effectif)
nouvel_effectif = 0
for i in range(1,effectif+1):
    nouvel_effectif = nouvel_effectif+random.randint(0,2)
print(nouvel_effectif)
```

B. 2. c)

Un graphique possible pour des effectifs de départ de 50 :



Effectif allèle A : 122

Effectif allèle B : 0

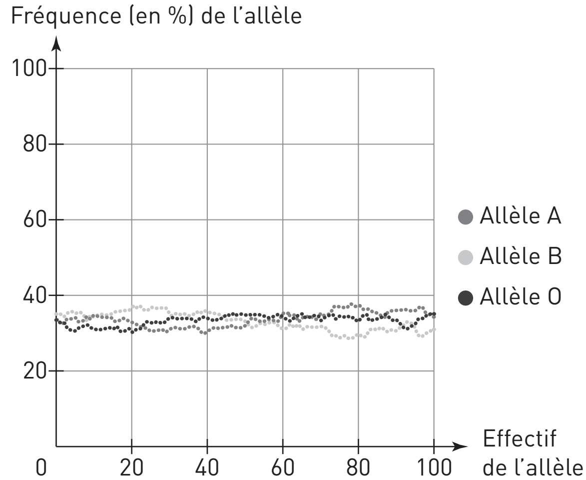
Effectif allèle O : 3

Fréquence allèle A : $\frac{122}{125} = 97{,}6\ \%$

Fréquence allèle B : 0 %

Fréquence allèle O : $\frac{3}{125} = 2{,}4\ \%$

3. Un graphique possible pour des effectifs de départ de 1 000 :



Effectif allèle A : 945

Effectif allèle B : 853

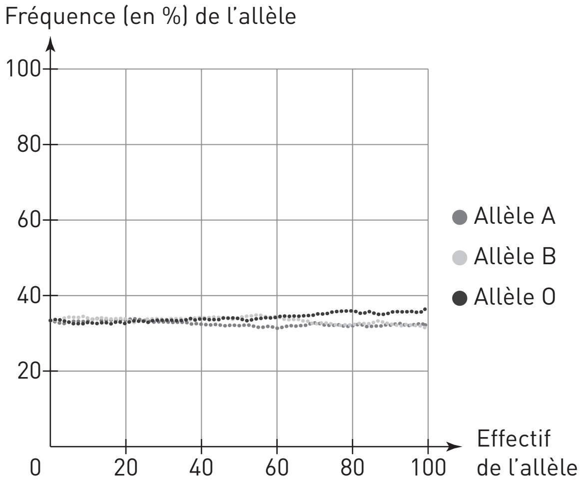
Effectif allèle O : 968

Fréquence allèle A : $\frac{945}{2\,776} \approx 34{,}2\ \%$

Fréquence allèle B : $\frac{853}{2\,776} \approx 30{,}8\ \%$

Fréquence allèle O : $\frac{968}{2\,776} \approx 35\ \%$

4. Un graphique possible pour des effectifs de départ de 10 000 :



Effectif allèle A : 9752

Effectif allèle B : 9515

Effectif allèle O : 10900

Fréquence allèle A : $\frac{9\,752}{30\,167} \approx 32{,}3$ %

Fréquence allèle B : $\frac{9\,515}{30\,167} \approx 31{,}5$ %

Fréquence allèle O : $\frac{10\,900}{30\,167} \approx 36{,}1$ %

En résumé :

Effectif de chaque allèle à la génération n°0 \ Fréquence (en %) à la génération n°100 de…	allèle A	allèle B	allèle O
50	97,6	0	2,4
1 000	34,2	30,8	35
10 000	32,3	31,5	36,1

5. L'idée forte est que lorsque les effectifs de départ sont faibles, le phénomène de fluctuation d'échantillonnage a beaucoup d'influence et peut entraîner de grandes disparités entre des allèles pourtant équirépartis au départ.

En revanche, pour de grands effectifs de départ, les différents allèles restent globalement équirépartis. Tout ceci est à mettre en lien avec la notion de dérive génétique qui est au programme de Seconde en SVT.

TP 4. Une petite étrangeté

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Constater que les tests d'égalité sur les flottants sont problématiques.

1.

```
x=float(input("Saisir x : "))
y=float(input("Saisir y : "))
if x*y==6.3:
    print("c'est égal")
else:
    print("ce n'est pas égal")
```

2. Les deux premiers affichages sont cohérents mais le dernier ne l'est pas car le produit des deux nombres est 6,3 mais le programme affiche que ce produit n'est pas égal à 6,3.

3. L'affichage n'est pas `6.3` comme attendu mais `6.300000000000001`…

TP 5. Pour calculer des aires et des volumes

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Écrire des fonctions « utiles ». C'est aussi l'occasion de travailler en groupe en utilisant l'aspect modulaire de la programmation (voir exercice 80).

A. 1.

```
import math

def aire_carre(c):
    return c**2
```

2.

```
def aire_rectangle(l1,l2):
    return l1*l2
```

3.

```
def aire_triangle(b,h):
    return (b*h)/2
```

```
def aire_disque(r):
    return math.pi*r**2
```

```
def volume_cube(c):
    return c**3
```

```
def volume_cone(r,h):
    return (1/3)*aire_disque(r)*h
```

```
def volume_boule(r):
    return (4/3)*math.pi*r**3
```

B. 1.

```
def menu_principal():
    print("Pour calculer des aires, taper 1")
    print("Pour calculer des volumes, taper 2")
    choix=int(input("Votre choix ?"))
    return choix
```

2.

```
def menu_aire():
    print("Pour l'aire d'un carré, taper 1")
    print("Pour l'aire d'un rectangle, taper 2")
    print("Pour l'aire d'un triangle, taper 3")
    print("Pour l'aire d'un disque, taper 4")
    choix=int(input("Votre choix ?"))
    return choix
```

3.

```
def menu_volume():
    print("Pour le volume d'un cube, taper 1")
    print("Pour le volume d'un cone, taper 2")
    print("Pour le volume d'une boule, taper 3")
    choix=int(input("Votre choix ?"))
    return choix
```

C. 1.

```
choix1 = menu_principal()
if choix1==1:
    choix2=menu_aire()
    if choix2==1:
        c=float(input("Longueur d'un coté ? "))
        print(aire_carre(c))
    if choix2==2:
        a=float(input("Longueur ? "))
        b=float(input("Largeur ? "))
        print(aire_rectangle(a,b))
    if choix2==3:
        b=float(input("Base ? "))
        h=float(input("Hauteur ? "))
        print(aire_triangle(b,h))
    if choix2==4:
        r=float(input("Rayon ? "))
        print(aire_disque(r))
if choix1==2:
    choix2=menu_volume()
    if choix2==1:
        c=float(input("Longueur d'un coté ? "))
        print(volume_cube(c))
    if choix2==2:
        r=float(input("Rayon de la base ? "))
        h=float(input("Hauteur ? "))
        print(volume_cone(r,h))
    if choix2==3:
        r=float(input("Rayon ? "))
        print(volume_boule(r))
```

3. On modifiera la fonction **`menu_principal`** comme ci-dessous.

```
def menu_principal():
    print("Pour calculer des aires, taper 1")
    print("Pour calculer des volumes, taper 2")
    print("Pour quitter le programme, taper 0")
    choix=int(input("Votre choix ?"))
    return choix
```

On modifiera le programme principal comme ci-dessous.

```
choix1=3
while choix1!=0:
    choix1 = menu_principal()
    if choix1==1:
        choix2=menu_aire()
        if choix2==1:
            c=float(input("Longueur d'un coté ? "))
            print(aire_carre(c))
        if choix2==2:
            a=float(input("Longueur ? "))
            b=float(input("Largeur ? "))
            print(aire_rectangle(a,b))
        if choix2==3:
            b=float(input("Base ? "))
            h=float(input("Hauteur ? "))
            print(aire_triangle(b,h))
        if choix2==4:
            r=float(input("Rayon ? "))
            print(aire_disque(r))
    if choix1==2:
        choix2=menu_volume()
        if choix2==1:
            c=float(input("Longueur d'un coté ? "))
            print(volume_cube(c))
        if choix2==2:
            r=float(input("Rayon de la base ? "))
            h=float(input("Hauteur ? "))
            print(volume_cone(r,h))
        if choix2==3:
            r=float(input("Rayon ? "))
            print(volume_boule(r))
```

Exercices en autonomie p. 39

Comprendre l'affectation

90. b   **91.** c

92. `La valeur de a est 180`

`La valeur de b est 60`

Travailler avec des instructions conditionnelles

93. d

94. En langage naturel

```
x←Valeur saisie
Si x > 5
    Afficher 6×x-2
Sinon
    Afficher 4×x+8
Fin si
```

En Python

```
x=float(input("x=?"))
if x>5:
    print(6*x-2)
else:
    print(4*x+8)
```

Comprendre et écrire une boucle

95. d **96.** c **97.** b

98. En langage naturel

```
Pour i allant de 312 à 24 381
    Afficher 2×i
Fin pour
```

En Python

```
for i in range(312,24382) :
    print(2*i)
```

99. En langage naturel

```
x←0
Tant que x ⩽ 1 000
    x←x + entier aléatoire entre 1 et 10
Fin tant que
```

En Python

```
import random
x=0
while x<=1000:
    x=x+random.randint(1,10)
```

Travailler avec les fonctions

100. c

101. La fonction retourne `-4/2=-2`.

102. En langage naturel

```
fonction ecart(x,y)
    Si x > y
        e←x-y
    Sinon
        e←y-x
    Fin si
    retourner e
```

En Python

```
def ecart(x,y):
    if x>y:
        e=x-y
    else:
        e=y-x
    return e
```

103. En langage naturel

```
fonction volumepave(a,b,c)
    Retourner a×b×c
```

En Python

```
def volumepave(a,b,c):
    return a*b*c
```

104. En langage naturel :

```
fonction multiples(k,n)
    Pour i entre 1 et n
        Afficher k×i
    Fin pour
```

En Python

```
def fonction(k,n):
    for i in range(1,n+1):
        print(k*i)
```

CHAPITRE 2 Nombres et calculs numériques

Manuel p. 42-67

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est le premier du nouveau domaine « Nombres et calculs ». Il reprend les notions vues au collège et les complètent pour arriver à une synthèse sur l'ensemble des nombres.

Nombres entiers : cette partie synthétise les connaissances vues au collège pour résoudre des problèmes arithmétiques.

Puissances : seule la définition est vue au collège avec l'écriture scientifique. Il s'agit donc de donner les différentes règles de calculs. Elles sont introduites par une activité sur les puissances de 10 puisqu'il s'agit des plus connues.

Quotient : l'ensemble des règles de calculs vues au collège sont reprises et permettant ainsi les remédiations.

Racines carrées : elles prennent le statut de nombres. Une activité les introduit comme longueurs d'une part et comme solutions d'une équation d'autre part avant de démontrer les règles de calculs.

Ensemble des nombres : cette partie permet d'étudier les différents ensembles de nombres que les élèves rencontreront tout au long de l'année en s'appuyant sur deux exemples : $\sqrt{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Capacités

- → **Utiliser les notions de multiples, diviseurs et nombres premiers.**
- → **Calculer avec les puissances.**
- → **Calculer avec les quotients.**
- → **Calculer avec les racines carrées.**
- → **Déterminer la nature d'un nombre.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ

p. 43

1. Connaître la division euclidienne

• Dans la division euclidienne de 177 par 15, le quotient est 11 et le reste est 12.

• Dans la division euclidienne de 177 par 11, le quotient est 16 et le reste est 1.

2. Utiliser les critères de divisibilité

a) 12 ; 30 ; 246 et 4 238

b) 12 ; 30 ; 27 et 246

c) 30 et 325

d) 27

3. Calculer avec les quotients

$A = \frac{3}{3} + \frac{7}{3} = \frac{10}{3}$ $\quad B = \frac{-10}{50} + \frac{14}{50} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

$C = \frac{7 \times 5}{15 \times 21} = \frac{7 \times 5}{3 \times 5 \times 3 \times 7} = \frac{1}{9}$

$D = \frac{-7}{3} \times \frac{6}{-21} = \frac{7 \times 6}{3 \times 21} = \frac{7 \times 3 \times 2}{3 \times 3 \times 7} = \frac{2}{3}$

4. Connaître la notation scientifique

Les nombres écrits en notation scientifique sont : **a)** et **d)**.

5. Utiliser la racine carrée en géométrie

Dans le triangle ABC, rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

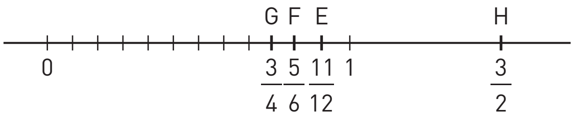
D'où $BC = \sqrt{58}$.

6. Connaître les carrés parfaits

Les carrés parfaits compris entre 1 et 144 sont : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 et 144.

7. Repérer des nombres sur une droite graduée

1.



2. C(23,5) ; K(27,5) ; J(25,5) ; L(29,5)

Activités p. 44-45

Activité 1. Calculer avec des puissances de 10

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Définir les règles de calculs sur les puissances. Les puissances de 10 sont celles les plus connues des élèves et servent de support aux écritures.

1. a) 10^5 et 10^9 **b)** 10^{13} et 10^1 **c)** 10^{n+p}

2. a) 10^3 **b)** 10^{12} et 10^{-5} **c)** 10^{n-p}

3. a) 10^6 **b)** 10^{15} et 10^{40} **c)** 10^{np}

4. Les démonstrations peuvent s'établir pour toute puissance autre que 10, d'où les formules du cours.

Activité 2. Connaître de nouveaux nombres

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Établir que $\sqrt{2}$ est un nombre en établissant qu'il s'agit d'une grandeur (dans l'activité, la longueur d'un segment) et de la solution d'une équation. Ces deux modèles sont connus des élèves puisqu'il s'agit des deux manières d'introduire les nombres relatifs et les quotients.

1. a) Le côté mesure 5 cm car $5^2 = 25$ et on en déduit $c^2 = 25$.

b) 4 et −4 sont les deux nombres qui, élevés au carré, donnent 16.

c) Le produit de deux nombres de même signe est positif, donc il n'existe pas de nombre dont le carré soit négatif.

d) *a* et *b* sont soit égaux soit opposés.

2. a) Il s'agit de tracer un carré dont l'aire vaut 2, donc de tracer un segment de longueur un nombre positif dont le carré est 2.

Le carré de la diagonale d'un carré de côté 1 est égale à 2 (il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore).

Il est donc possible de tracer un carré d'aire 2 en traçant les diagonales des carrés de côté 1.

b) $c^2 = 2$ puisque c est le côté d'un carré d'aire 2.

c) c est un nombre entre 1 et 2. Par test, les élèves peuvent approcher ce nombre.

d) La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice est connue des élèves : 1,4142.

Activité 3. Calculer le produit de deux racines carrées

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Établir la règle du produit de deux racines carrées.

1. a) Aire de POM $= \dfrac{OM \times PH}{2} = \dfrac{13 \times 6}{2} = 39$

b) Le triangle POH est rectangle en H donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OP^2 = OH^2 + HP^2$

$OP^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117$

Le triangle PHM est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$PM^2 = PH^2 + HM^2$

$PM^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$

Dans le triangle PMO, le plus grand côté est [MO], donc on calcule séparément :

d'une part, $OM^2 = 13^2 = 169$;

d'autre part, $OP^2 + PM^2 = 117 + 52 = 169$.

$OM^2 = OP^2 + PM^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle POM est rectangle en P.

c) Aire de POM $= \dfrac{PM \times PO}{2} = \dfrac{\sqrt{117} \times \sqrt{52}}{2}$

d) Aire de POM = $\dfrac{\sqrt{117} \times \sqrt{52}}{2} = 39$

Donc $\sqrt{117} \times \sqrt{52} = 78 = \sqrt{78^2} = \sqrt{6\,084}$ et on remarque que $117 \times 52 = 6\,084$.

On a donc $\sqrt{117} \times \sqrt{52} = \sqrt{117 \times 52}$.

e) $6\,084 = 3 \times 3 \times 13 \times 13 \times 2 \times$

$\sqrt{117} \times \sqrt{52} = \sqrt{3 \times 3 \times 13 \times 13 \times 2 \times 2}$

f) $\sqrt{117} \times \sqrt{52} = \sqrt{(3 \times 3 \times 13) \times (13 \times 2 \times 2)}$

$= \sqrt{117 \times 52}$

g) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour a et b positifs.

2. a) Pour que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ existent, il faut que a et b soient positifs.

b) $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$

$= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = a \times b$

Comme ils ont le même carré, alors ils sont égaux ou opposés. Étant tous les deux positifs ils sont donc égaux : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Activité 4. Faire le point sur les nombres

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Étudier les différents ensembles de nombres.

1. a) Les nombres entiers sont :

854 ; $0{,}000\,08 \times 10^7$; $\sqrt{49}$; $\dfrac{174}{58}$.

Les nombres décimaux sont :

les nombres entiers déjà cités et $-0{,}000\,415\,7$; $\dfrac{58}{4}$; 10^{-3}.

b) Oui, ceux qui ne font pas partie de la liste précédente c'est-à-dire $\dfrac{-457}{23}$; $4\sqrt{2}$; π et $-\sqrt{\dfrac{4}{9}}$.

c) Oui, tous ceux des deux listes précédentes et $\dfrac{-457}{23}$; $-\sqrt{\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{2}{3}$.

d) Oui : $4\sqrt{2}$ et π.

2. a) Si deux nombres sont égaux alors leurs carrés le sont également.

Donc $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ d'où $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$.

On a donc $2q^2 = p^2$.

Si le chiffre des unités de p est :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est :	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b)

Si le chiffre des unités de q est :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de q^2 est :	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
et le chiffre des unités de $2q^2$ est :	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

c) Il faut trouver un chiffre commun aux deux tableaux. Le seul chiffre commun est 0. Donc le chiffre des unités possible pour p est 0 et pour q est 0 ou 5.

d) Les résultats précédents indiquent que p est un multiple de 10 et que q est un multiple de 5. Ils sont donc tous les deux multiples de 5 ce qui est en contradiction avec les données de l'énoncé : $\dfrac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

On en déduit donc que l'hypothèse de départ est fausse, ce qui signifie que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

À vous de jouer ! p. 50-53

1. $\sqrt{821} \approx 28{,}7$ et 821 n'est divisible par aucun premier inférieur ou égal à cette valeur (2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23), donc 821 est premier.

861 est divisible par 3 car $8 + 6 + 1 = 15 = 3 \times 5$.

762 est divisible par 2.

$\sqrt{83} \approx 9{,}1$ et 83 n'est divisible par aucun premier inférieur ou égal à cette valeur (2 ; 3 ; 5 ; 7), donc 83 est premier.

1 023 est divisible par 3 car $1 + 0 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$.

2. a) $5 \times 3^4 \times 7$ **b)** $3^3 \times 7^2$

c) $7 \times 11 \times 13$ **d)** $3 \times 2^5 \times 19 \times 5^2$

3. a) $\frac{270}{253}$ **b)** $\frac{304}{51}$ **c)** $\frac{7}{3}$

4. $A = 5^{-10}$ $B = 6^2$ $C = 21^{-23}$
$D = -5^7$ $E = 8^6$

5. $E = 2^7$ $F = (-3)^{-4}$ $G = 7^{46}$

6. $H = 180 \times 10^{-14}$ $I = 1{,}3537 \times 10^{-11}$
$J = 625 \times 10^{16}$ $K = 1\,800$
$L = 6{,}3 \times 10^{-11}$

7. $A = -\frac{19}{14}$ $B = \frac{22}{35}$ $C = \frac{15}{26}$

8. $D = \frac{63}{2}$ $E = \frac{7}{30}$ $F = -\frac{15}{26}$

9. $G = 2$ $H = \frac{5}{24}$ $I = 3$

10. $A = -\frac{2}{9}$ $B = -\frac{1}{8}$ $C = \frac{20}{11}$ $D = -\frac{5}{14}$

11. $G = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $H = 5$ $I = \frac{11}{7}$

12. $A = 6\sqrt{10}$ $B = 42\sqrt{7}$

$C = 10\sqrt{13}$ $D = 2\sqrt{6}$

13. $M = \frac{\sqrt{6}}{9}$ $N = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $P = 2$

14. $E = 16\sqrt{3}$ $F = -23\sqrt{5}$

Exercices d'application p. 54-56

Apprendre à apprendre

15. Voir l'exercice résolu 3 p. 52.

16. Voir l'exercice résolu 2 p. 51.

17. Voir la remarque de la page 49 et l'exercice résolu 4 p. 53.

18. Voir l'exercice résolu 4 p. 53.

19. Voir l'exercice résolu 4 p. 53.

Questions - Flash

20. a) Oui, car 28 est dans la table de 4.
b) Non, car 32 n'est pas dans la table de 6.
c) Non, car 18 n'est pas dans la table de 4.
d) Oui, car 35 est dans la table de 5.

21. 1. $204 = 17 \times 3 \times 2 \times 2$
$595 = 5 \times 17 \times 7$
2. $\frac{204}{595} = \frac{12}{35}$

22. a) $2^{-5} = \frac{1}{32}$ **b)** $5^{-1} = \frac{1}{5}$ **c)** $4^{-3} = \frac{1}{64}$

23. $A = 8^{10}$ $B = 11^3$ $C = (-3)^5$

24. a) $\frac{5}{6} + \frac{-1}{3} = \frac{1}{2}$
b) $\frac{-3}{10} \times \frac{-11}{3} = \frac{11}{10}$ (avant tout calcul d'un produit, on détermine le signe du produit.)
c) $\frac{8}{-1} \div \frac{-4}{5} = 10$

25. a) $\sqrt{3^2} = 3$ **b)** $\left(-\sqrt{16}\right)^2 = 16$ **c)** $\sqrt{(-7)^2} = 7$

26. a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{7} \times \sqrt{21} = 7\sqrt{3}$

27. a) $\frac{3}{2} = 1{,}5$, donc $\frac{3}{2}$ appartient à l'ensemble des nombres décimaux.
b) $\frac{11}{3}$ n'est pas un nombre décimal, donc il appartient à l'ensemble des quotients.
c) $\frac{8}{2} = 4$, donc $\frac{8}{2}$ appartient à l'ensemble des entiers naturels.
d) $\sqrt{9} = 3$, donc $\sqrt{9}$ appartient à l'ensemble des entiers naturels.
e) $\sqrt{11}$ appartient à l'ensemble des nombres réels.

Multiples et diviseurs

28. a) 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 **b)** 7

29. 720 ; 750 ; 780 ; 705 ; 735 ; 765 ; 795

30. a) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32

b) 1 ; 67

c) 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81

d) 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16 ; 18 ; 24 ; 36 ; 48 ; 72 ; 144

31. a) Faux, 13 n'est pas divisible par 3.

b) Un nombre divisible par 5 se termine par 0 ou 5. Un nombre divisible par 4 a ses deux derniers chiffres divisible par 4. Donc un nombre divisible par 5 et par 4 se termine par 0 et est donc divisible par 10.

c) Faux, 6 est divisible par 3 et 2 mais pas par 5.

d) Faux, 10 est divisible par 2 mais pas par 4.

Nombres premiers

32. 157 et 311

33. 169 ; 558 ; 615 ; 2 367 et 14 674

34. a) $215 = 5 \times 43$

b) $507 = 3 \times 13 \times 13$

c) $1\,868 = 2 \times 2 \times 467$

d) $1\,431 = 3 \times 3 \times 3 \times 53$

35. a) $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

b) 59 est premier. **c)** $115 = 5 \times 23$

d) $187 = 17 \times 11$ **e)** 227 est premier.

f) $303 = 101 \times 3$ **g)** 503 est premier.

h) $667 = 23 \times 29$

36. a) $\frac{8}{7}$ **b)** $\frac{8}{9}$ **c)** $\frac{21}{7}$ **d)** $\frac{13}{16}$

37. 1. $650 = 13 \times 5 \times 10$

$800 = 16 \times 5 \times 10$

2. $\frac{13}{16}$

38. 1. $2\,261 = 7 \times 13 \times 19$

$323 = 17 \times 19$

2. $\frac{91}{17}$ **3.** $\frac{637}{119}$

Résolution de problèmes arithmétiques

39. Le groupe peut donc être un multiple de 12 sans être un multiple de 24.

40. 1. Si un entier n est un multiple de 15, alors il existe un entier k tel que $n = 15k$.

Donc $n = 3 \times (5k) = 5 \times (3k)$.

n est donc également un multiple de 3 et de 5.

2. La réciproque semble vraie : si un entier est multiple de 3 et de 5, alors il est multiple de 15.

41. 1. Oui car $35 = 5 \times 7$ et $6\,300 = 900 \times 7$.

2. $6\,335 = 6\,300 + 35 = 900 \times 7 + 5 \times 7$

$6\,335 = (900 + 5) \times 7$

3. Si x et y sont divisibles par 7, alors x peut s'écrire $7 \times x'$ et y peut s'écrire $7 \times y'$.

D'où $x + y = 7 \times x' + 7 \times y' = 7 \times (x' + y')$.

C'est donc un multiple de 7.

4.
$$\begin{aligned} 6\,349\,147 &= 6\,300\,000 + 49\,000 + 140 + 7 \\ &= 7 \times 900\,000 + 7 \times 7\,000 + 7 \times 20 + 7 \\ &= 7 \times (900\,000 + 7\,000 + 20 + 1) \end{aligned}$$

C'est donc un multiple de 7.

42. $(2n)^2 = 4n^2$ ou $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 2n + 1$

Supposons que a n'est pas pair. a s'écrit $2n + 1$ donc $a^2 = 4n^2 + 2n + 1 = 2(2n^2 + n)+1$ et donc a^2 est impair.

Par contraposée, on en déduit la propriété.

43. Deux entiers sont consécutifs, donc s'écrivent $2p$ et $2p + 1$.

$2p(2p + 1) = 4p^2 + 2p = 2(2p^2 + p)$ et donc leur produit est pair.

44. 1. Les multiples de 18 s'écrivent $18n$.

2. $18n = 6 \times (3n) = 3 \times (6n)$, donc un multiple de 18 est un multiple de 6 et de 3.

3. La réciproque est fausse : 6 est un multiple de 3 et de 6 mais pas de 18.

Calculs avec les puissances

45. 1. A = $2^4 \times 5^5$ et B = $2^9 \times 5^4$

2. E = $\frac{2^3}{5^4}$ et F = $\frac{5^2}{2^4}$

46. a) $\frac{1}{12^5}$ **b)** $\frac{1}{7^5}$ **c)** $\frac{1}{8^6}$

d) 9^{-23} **e)** $\frac{1}{1{,}5^{-2}}$ **f)** $\frac{1}{(-7)^{-3}}$

47. a) 5^6 **b)** 6^{-3} **c)** 15^4

d) $10{,}5^{-7}$ **e)** $(-4)^{-6}$ **f)** $(-2)^2$

48. a) 3^{12} **b)** 2^5 **c)** 4^4

d) $(-1{,}5)^4$ **e)** $(3{,}6)^{-3}$ **f)** $(3{,}2)^{-3}$

49. a) $2{,}8^{-2}$ **b)** 5^2 **c)** $(-3{,}7)^{-10}$

d) $(3{,}5)^{-3}$ **e)** $(5{,}6)^{-8}$ **f)** 1

g) $(-6)^5$ **h)** $21{,}2^{-6}$ **i)** $1{,}4^{-5}$

50. A = 9^6 B = 11^3 C = $(-3)^3$

Calculs avec les quotients

51. a) $\frac{97}{75}$ **b)** $\frac{65}{4}$ **c)** $-\frac{201}{25}$ **d)** $-\frac{61}{108}$

52. a) $-\frac{15}{21}$ **b)** 1 **c)** -2 **d)** $\frac{8}{5}$

53. a) $-\frac{1}{12}$ **b)** 1 **c)** -16 **d)** $-\frac{4}{7}$

54. a) $\frac{10}{3}$ **b)** $\frac{2}{15}$ **c)** $\frac{22}{21}$

55. D = -6 E = $\frac{984}{245}$

Calculs avec les racines carrées

56. a) 10 **b)** 3 **c)** impossible **d)** 8

e) 13 **f)** impossible **g)** impossible **h)** $\sqrt{\pi}$

57. a) 25 **b)** 3 **c)** 16

d) 0,14 **e)** 7 **f)** 0,4

58. a) $5\sqrt{3}$ **b)** $5\sqrt{3}$

c) $7\sqrt{3}$ **d)** $6\sqrt{3}$

59. a) $4\sqrt{2}$ **b)** $5\sqrt{3}$ **c)** $10\sqrt{5}$ **d)** $4\sqrt{5}$

e) $-4\sqrt{3}$ **f)** $15\sqrt{2}$ **g)** $-16\sqrt{2}$

60. a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{7}{5}$ **d)** $\frac{1}{4}$

61. a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $21\sqrt{2}$ **d)** $70\sqrt{35}$

62. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\frac{7\sqrt{15}}{15}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{2}{3}$

63. A = $9 + 4\sqrt{3}$ B = $6 + 12\sqrt{3}$

Calculs et automatismes

64. A = 0 B = 1 C = 1,2 D = 2

65. A = $2\sqrt{2}$ B = $2\sqrt{5}$ C = $\sqrt{3}$

D = $\sqrt{10}$ E = 7 F = $10\sqrt{3}$

G = $9\sqrt{10}$ H = $3\sqrt{3}$

Exercices d'entraînement p. 57-60

Arithmétique

66. 1. Le fleuriste veut utiliser toutes ses fleurs, il ne doit pas en rester, le nombre de bouquets doit donc être un diviseur de 30 et de 24.

2. 30 = 5 × 3 × 2 et 24 = 2 × 3 × 2 × 2

Les diviseurs de 30 sont 30 ; 1 ; 15 ; 2 ; 3 ; 10.

Les diviseurs de 24 sont 24 ; 1 ; 2 ; 12 ; 3 ; 8 ; 4 ; 6.

3. Les diviseurs communs de 30 et 24 sont : 1 ; 2 ; 3 et 6.

On peut réaliser 6 bouquets au maximum de 5 tulipes et 4 muscaris.

67. 1. 20 divise 180 et 120, il peut donc y avoir 20 joueurs.

Il ne peut pas y avoir 9 joueurs car 120 n'est pas divisible par 9 (il resterait 3 jetons qu'on ne pourrait pas répartir équitablement).

2. On cherche donc tous les diviseurs communs à 180 et 120. Il peut donc y avoir 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ou 60 joueurs.

68. Les 4 entiers sont 91 ; 98 ; 105 et 112.

69. 1. 2 **2.** $2p + 1$ et $2p + 3$

3. $2p + 1 + 2p + 3 = 4p + 4 = 4(p + 1) = 4m$

(on pose $m = p + 1$.)

70. 1. n s'écrit sous la forme $2k + 1$.

$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k$

$= 4k(k + 1)$

Or k et $k + 1$ sont deux nombres consécutifs, donc l'un des deux est pair, c'est-à-dire multiple de 2 et $4k$ est un multiple de 4.

Le produit $4k(k + 1)$ est donc multiple de 8.

2. Oui, car 3 est un nombre impair et le produit de deux nombres impairs est toujours impair, donc le produit de plusieurs impairs est toujours impair. Si on ajoute 1, alors le nombre est pair.

3. $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n \times 2$

$= 2^n \times (1 + 2) = 2^n \times 3$

C'est donc un multiple de 3.

71. 1. La division euclidienne de a par b.

2. Si le reste est nul, a est un multiple de b.

3.

```
d=a divb
Si d=0 alors a est un multiple de b
Sinon a n'est pas un multiple de b
```

72. Si a est un diviseur de b, b est un multiple de a et le programme est celui de l'exercice précédent en inversant l'ordre des lettres.

73. 1.

```
a, m et i sont des entiers
demander a
m←a
Pour i de 1 à 10
m=i*a
afficher m
Fin pour
```

2.

```
a, b, m et i sont des entiers
demander a
demander b
m ← a
Tant que m < b
m=i*a
I ← i+1
fin tant que
afficher m−a
```

74. 1. $1\,001 = 7 \times 143$ et $2\,002 = 143 \times 14$

2. $a00a = 1\,000 \times a + a = 10 \times 100a + a$ avec $a < 10$

3. $143 = 11 \times 13$

$a00a = a \times 1\,001 = a \times 7 \times 143$, donc $a00a$ est divisible par 143.

Calculs avec les puissances

75. Soit N le nombre de neurones d'un humain de 40 ans.

Au nombre de neurones d'un humain de 30 ans, on retranche 10 fois la perte annuelle.

$N = 100 \times 10^9 - 10 \times 365 \times 100\,000$

$N = 99\,635\,000\,000$ $N = 9{,}963\,5 \times 10^{10}$

76. 1. Dans une année, il y a ($365 \times 24 \times 60 \times 60$) 31 536 000 secondes, donc une année-lumière correspond à ($31\,536\,000 \times 300\,000$) 9 460 800 000 000 km, soit $9{,}460\,8 \times 10^{12}$ km.

365 et 300 000 sont des valeurs approchées. Pour plus de précision, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Année-lumière.

2. $\dfrac{1{,}5 \times 10^8}{9{,}460\,8 \times 10^{12}} = 0{,}158 \times 10^{-4} = 0{,}0000158$ al

Il s'agit d'un calcul approché.

77. 1. $A = \dfrac{7}{3}$ **2.** $B = 5 \times 10^3$ **3.** $C = 5 \times 10^5$

4. $D = 1{,}8 \times 10^{-2}$ (écriture scientifique)

$D = 0{,}018$ (écriture décimale)

78. a) $10^9 < 4{,}5 \times 10^9 < 10^{10}$

b) $10^{-6} < 3 \times 10^{-6} < 10^{-5}$

c) $10^{9} < 4{,}1 \times 10^{9} < 10^{10}$

79. 1.

```
a, p sont des entiers
demander a
p←1
afficher p (1re puissance de a : a0)
Pour i de 1 à 9
    p←p*a
    Afficher p
Fin pour
```

b)

```
a, b, p sont des entiers
demander a
demander b
p←1
Tant que p < b
    p←p*a
Fin tant que
Afficher p/a
```

3.

```
a, b, p sont des entiers
demander a
demander b
p←1
Tant que p < b
    p←p*a
Fin tant que
Afficher p
```

4.

```
a, b, p sont des entiers
SUP est un booléen
demander a
demander b
Si demander "déterminer la première
puissance d'un nombre positif a
supérieure à b?" est "oui"
    Alors SUP←vrai
Sinon SUP←faux
    p ← 1
Tant que p < b
    p ← p*a
Fin tant que
Si SUP=vrai
    Alors Afficher p
Sinon afficher p/a
```

80. 1. $A = \dfrac{1}{1\,152}$ **2.** $B = \dfrac{512}{3}$

3. $C = 9 \times 10^1$

4. $D = 6{,}1509375 = 6{,}1509375 \times 10^0$

81. a) $6{,}5 \times 10^3$ **b)** $3{,}2 \times 10^{-3}$

c) $-1{,}4752 \times 10^3$ **d)** $2{,}345 \times 10^1$

e) $-3{,}43 \times 10^1$ **f)** -1×10^{-3}

82. a) $6{,}45 \times 10^{-13}$ **b)** $5{,}6 \times 10^{15}$

c) $-1{,}36 \times 10^{-7}$ **d)** $-5{,}23 \times 10^9$

83. 1. 210,12 **2.** $2{,}1012 \times 10^2$

3. $21\,012 \times 10^{-2}$ **4.** $210 + \dfrac{12}{100}$

84. $A = 1{,}8 \times 10^{-12}$ $B = 6{,}25 \times 10^{18}$

$C = 1{,}2 \times 10^{33}$ $D = 1{,}22 \times 10^9$

85. $\dfrac{60}{31} \times 10^{-23}$ g

86. 1. $1{,}26144 \times 10^{11}$ km

(1 année = $3\,600 \times 24 \times 365$ s)

2. $5\,000 \times 1{,}26144 \times 10^{11} = 6{,}3072 \times 10^{14}$ km

87. 1. 3 ; 9 ; 7 ; 1 ; 3

2. On constate que les chiffres des unités des puissances de 13 sont cycliques de période 4.

Le chiffre des unités de tous les nombres de la forme 13^{1+4k} est 1.

$2\,000 = 500 \times 4$, donc 2 000 est de la forme $4k$ ce qui correspond au chiffre des unités de 13^4, soit 1.

Calculs avec les quotients

88. $A = \dfrac{97}{30}$ $B = \dfrac{23}{7}$ $C = -\dfrac{7}{40}$ $D = -\dfrac{31}{36}$

89. $A = \dfrac{14}{17}$ $B = \dfrac{14}{5}$ $C = -\dfrac{5}{14}$

$D = -\dfrac{73}{10}$ $E = 16$ $F = -\dfrac{5}{3}$

90. 1. 200 passagers sont en 1re classe, 600 sont en 2de.

2. 175 personnes descendent à Lyon : 75 en 1re classe et 100 en 2e classe.

3. La proportion des passagers de 1re classe descendant en gare de Lyon est de $\frac{3}{32}$.
La proportion des passagers de 2de classe descendant en gare de Lyon est de $\frac{1}{8}$.

91. 1. $\frac{14}{15}$
2. Le périmètre initial est 22 cm. Le nouveau périmètre est $\frac{374}{15} = \frac{17}{15} \times 22$.
Le périmètre a été multiplié par $\frac{17}{15}$.

92. 1. $\frac{31}{32}$
2. $\frac{1}{32}$ du gâteau manque pour faire un gâteau entier. Si le 6^{e} jour elle prend $\frac{1}{64}$ du gâteau, elle aura mangé $\frac{63}{64}$ du gâteau. Elle n'atteindra jamais 1 gâteau entier même si elle s'en approchera toujours un peu.

93. 1. Le volume du tonneau est environ 1,740 m^3 soit 1 740 L.
2. 2 319 bouteilles

94. La moitié. Le calcul est $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\right)$.

95. L'azote représente 98,25 m^3 et l'oxygène 26,125 m^3.

96. $A = 3\sqrt{2}$ $B = -20\sqrt{5}$
$C = 47\sqrt{3}$ $D = 14\sqrt{7}$

97. $A = -1 + 7\sqrt{3}$ $B = -7 + 19\sqrt{2}$ $C = -56 + 6\sqrt{2}$

98. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ **c)** $\frac{\sqrt{6}}{8}$ **d)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

99. 1. $3\sqrt{5}$ **2.** 10
3. En remplaçant x par a dans le membre gauche de l'équation, on obtient un nombre négatif donc a ne peut être solution de l'équation.

100. 1. $a^2 = 15 - 10\sqrt{2}$ et $b^2 = 27 + 10\sqrt{2}$
2. $a^2 + b^2 = 42$ et $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{42}$

101. $A = \frac{3}{2}$ $B = 5$ $C = 2\sqrt{3} - 15$
$D = -200$ $E = 2\sqrt{3} + 2$ $F = 12 + 12\sqrt{2}$

102. 1. $\sqrt{74}$ **2.** $\sqrt{85}$

103. 1. $4\sqrt{2}$ **2.** $12\sqrt{2}$ soit 17,0 cm

104. 1. $18\sqrt{3}$ cm **2.** 60 cm^2

Ensemble de nombres

105. 1. $A = 9\sqrt{5}$ et $B = 3\sqrt{5}$
2. $A \times B = 9 \times 3 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 135$
$\frac{A}{B} = \frac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 3$

106. $D = \frac{5\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{30}{6} = 5$
D est un nombre entier naturel.

107. 1. $20\,755 = 593 \times 7 \times 5$
et $9\,488 = 593 \times 2^4$
Donc $M = \frac{29}{16}$.
2. $M = \frac{29}{16} = 1{,}8125$
M est un nombre décimal et rationnel.

Travailler autrement

108.

Le nombre d'or noté φ a plusieurs définitions : les différents thèmes les abordent. Les contenus mathématiques sont différents selon les thèmes et s'adaptent à tous les profils d'élèves. Le thème 1 est une démonstration facile de la construction du rectangle d'or. Le thème 2 est aussi une construction, mais cette fois du pentagone et les démonstrations sont plus complexes.
Les thèmes 3 et 4 réactivent les notions

essentielles du tableur, le thème 4 étant plus facile que le thème 3.

Le thème 5 est un thème purement culturel et fait de recherche documentaire.

Thème 1 : Le rectangle d'or

1. Le rectangle d'or est un rectangle tel que le quotient entre la largeur et la longueur soit égale au nombre d'or.

La définition ici du nombre d'or est donc celle de la proportion :

a et *b* sont deux nombres strictement positifs tels que $a > b$: $= \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$.

Les élèves, au cours de leur recherche pourront illustrer cette définition en utilisant les triangles semblables. Ils pourront également démontrer que φ est solution de $x^2 - x - 1 = 0$. Ils pourront chercher des exemples du rectangles d'or dans la vie courante : livre de poche, carte bancaire... en sont une bonne approximation.

2. *Programme de construction :*

Tracer un carré ABCD et placer I le milieu de [AB].

Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon IC.

Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe (AB) en E.

Construire F tel que AEFD soit un rectangle.

Démonstration :

$IC = \dfrac{\sqrt{5}b}{2}$ donc $AE = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}AD$ et $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AE+AD}{AE}$

La démonstration est aisée et utilise les propriétés géométriques de collège.

$\varphi \approx 1{,}6$

Thème 2 : Le pentagone régulier

1. Le pentagone régulier est un polygone convexe à 5 sommets et 5 côtés égaux.

Le pentagramme associé est l'étoile formée par les 5 sommets.

Il existe une méthode de construction du pentagone régulier à partir du nombre d'or.

On détermine deux longueurs *a* et *b* telles que *a* et *b* sont deux nombres positifs tels que $a > b$: $= \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$ qui est donc la définition du nombre d'or (voir le thème 1).

2. *Programme de construction :*

Construire un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon *a.* Soit [O'A] un diamètre du cercle.

Construire le cercle de centre O' et de rayon *b.* Il recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en C et D.

Construire le cercle de centre O' et de rayon $a + b$. Il recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en E et B.

ABCDE est un pentagone régulier de centre O. (Il est possible qu'il faille inverser les noms des points B et E pour que le polygone ABCDE soit convexe.)

La démonstration est plus complexe et il peut être possible de vérifier que le pentagone est régulier avec le logiciel de géométrie.
D'autres constructions à la démonstration plus accessible sont également possibles mais plus compliquées.

$\Phi \approx 1{,}6$

Thème 3 : Les racines continuées

1. $A = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$

$B = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1{,}5537$

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} \approx 1{,}5980$

$D = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}} \approx 1{,}6118$

2. Écrire 1 en A1, `=RACINE($A$1+A1)` en B1 et étendre la formule vers la droite.

On trouve des valeurs de plus en plus précises de φ ce qui fait donc l'objet d'une recherche.

Ce groupe travaille donc sur les formules dans un tableur avec les deux types d'adressage : relatif et absolu.

Thème 4 : La suite de Fibonacci

1. La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1).

2. Ses premiers termes sont : 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; 233 ; 377 ; 610 ; 987 ; 1 597 ; 2 584 ; 4 181 ; ...

Ce groupe travaille donc sur les formules dans un tableur avec un seul type d'adressage : relatif.

3. Le quotient de deux termes consécutifs est une approximation du nombre d'or.

Thème 5 : φ dans l'art et dans la nature

1. La première mention apparaît dans l'Antiquité chez Euclide et est reprise par des religieux qui lui donnent un caractère mystique puis divers mathématiciens puis par des artistes.

2. Les spirales (coquillage, pomme de pin, cyclone…), les pétales de fleurs, les pavages (ananas, tournesol, …), etc.

3. Dans le travail de l'architecte Le Corbusier, les pyramides d'Égypte et les monuments et sculptures antiques grecs, chez les peintres Léonard de Vinci, Dali…

Exercices bilan p. 61

109. Quotient et ensemble de nombres

1. $G = \dfrac{11}{13}$

2. $H = \dfrac{19}{26}$.

H n'est pas un décimal, c'est un nombre rationnel.

110. Fraction irréductible

$J = \dfrac{10}{7}$

111. Calcul et quotients

1. $A = \dfrac{3}{4}$ **2.** $B = 20$

3. Le plus petit ensemble qui contient A est l'ensemble des nombres décimaux.

4. Le plus petit ensemble qui contient B est l'ensemble des nombres entiers naturels.

112. Masse d'un atome

1. $m = 11{,}983\ 78$ g **2.** $m \approx 12$ g

113. Simplification de racines carrées

D = 5

D est un nombre entier.

114. Biologie

1. 5×10^3 **2.** 120 000

3. $3{,}504 \times 10^9$

115. Puissances et nombres entiers

1. $349\ 272 = 2^3 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$

2. $36\ 288 = 2^6 \times 3^4 \times 7$

3. $349\ 272 = 2^3 \times 3^3 \times 3^1 \times 7^2 \times 11 = N \times 3 \times 7 \times 11$

Donc N est un diviseur de 349 272.

$36\ 288 = N \times 2^3 \times 3^1$

Donc N est un diviseur de 36 288.

4. $M = 349\ 272 \times 2^3$

$M = 36\ 288 \times 7 \times 11$

Donc M est multiple commun à 349 272 et à 36 288.

116. Géométrie et racines carrées

1. Voir la construction.

2. $AC = \sqrt{2}$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

3. $AG = \sqrt{18}$ d'après le théorème de Pythagore dans AEG.

4. $AG = 3 \times AC$ (le carré AEGH est un agrandissement du carré ABCD).

5. $AF = \sqrt{10}$ d'après le théorème de Pythagore dans AEF.

6. $AP = AF = \sqrt{10} = \sqrt{5}AC$.

$\sqrt{5}$ n'est pas un nombre entier, donc AP n'est pas un multiple de AC.

7. $CG = AG - AC = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

8. $AG = \sqrt{2} + \sqrt{8}$ et $AP = \sqrt{10}$.

$AG > AP$ donc $\sqrt{2} + \sqrt{8} > \sqrt{10}$.

On démontre donc que :
$\sqrt{2} + \sqrt{8} \neq \sqrt{2+8}$

117. Aire et racines carrées

1. $5\sqrt{3}$

2. ABCD a quatre angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur. C'est un carré.

3. $20\sqrt{3} \approx 34{,}6$ cm **4.** 75 cm

Exercices d'approfondissement p. 62-63

118. Divisibilité

d divise n, donc il existe un entier k tel que $n = kd$.

d' divise d, donc il existe un entier k' tel que $d = k'd'$.

Donc $n = kk'd'$ et d' divise aussi n.

On n'utilise pas l'information que d est le plus petit diviseur premier de n dans cet exercice. Il peut s'ouvrir sur un raisonnement par l'absurde pour prouver que d' n'existe pas, ce qui permet de faire le lien avec l'exercice 119.

119. Une propriété du cours

1. S'il n'existe pas de diviseurs autre que n et 1 alors n serait premier. Or on suppose que n ne l'est pas.

2. Soit d' un diviseur de d autre que 1 et d.

D'après l'exercice précédent, $d = kd'$ avec k différent de 1. d' divise également n et $d' < d$. Ce qui contredit que d est le plus petit diviseur de n. On en déduit donc que d n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même, il est donc premier.

3. d divise n donc il existe un entier k tel que $n = kd$ et $1 < d < n$. k est aussi un diviseur de n plus grand que d car d est le plus petit diviseur : $k > d$ donc $kd > d^2$ soit $n > d^2$. On en déduit que $\sqrt{n} > d$.

120. Le crible d'Ératosthène

1. Voir le fichier à télécharger.

2. Rayer sur le fichier tous les multiples de 2 et ceux de 3.

3. Les multiples de 4 sont des multiples de 2, ils sont donc déjà rayés.

4. 5

5. En réitérant la procédure, on liste les premiers nombres premiers.

121. Escaliers et division euclidienne

Soit N le nombre de marches.

N est un multiple de 3 compris entre 130 et 150 donc 132 ; 135 ; 138 ; 141 ; 144 ; 147.

$N = 4k + 1$ donc on cherche si $N - 1$ est divisible par 4.

$N = 141$

Il y a 141 marches.

122. Développement décimal périodique

$\frac{253}{7} = 36{,}14285714\ \ldots$ On remarque donc un cycle répétitif 1-4-2-8-5-7 de longueur 6.

1$^{\text{er}}$ décimale $(1 = 6 \times 0 + 1) \rightarrow 1$

2$^{\text{e}}$ décimale $(2 = 6 \times 0 + 2) \rightarrow 4$

…

7$^{\text{e}}$ décimale $(7 = 6 \times 1 + 1) \rightarrow 1$

8$^{\text{e}}$ décimale $(8 = 6 \times 1 + 2) \rightarrow 4$

…

$314 = 6 \times 52 + 2$

La 314$^{\text{e}}$ décimale est donc 4.

123. Développement décimal illimité

1. $10x - 9 = 9{,}99999\ldots - 9 = 0{,}999999\ldots$

2. $x = 1$

3. On a $0,99999\ldots. = 1$.

124. Produit de deux puissances

1. et **2.** Si n et m sont négatifs : $-n$ et $-m$ sont positifs et :

$$a^n \times a^m = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{a^{-m}}$$
$$= \frac{1}{\underbrace{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{-n \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{-m \text{ facteurs}}}_{-n-m \text{ facteurs au total}}}$$
$$= \frac{1}{a^{-n-m}} = a^{n+m}$$

125. Des molécules d'eau

1. $m = 2{,}988972 \times 10^{-26}$ kg

2. $3{,}35 \times 10^{25}$ molécules d'eau

3. $4{,}6 \times 10^{46}$ molécules d'eau

4. Par seconde : $8{,}375 \times 10^{30}$

Par an : environ $2{,}64 \times 10^{38}$

126. Production d'électricité

1. 1 Twh correspond à mille milliards de Wh.

549,4 TWh = $5{,}494 \times 10^{14}$ Wh

430,0 TWh = $4{,}3 \times 10^{14}$ Wh

57,2 TWh = $5{,}72 \times 10^{13}$ Wh

62,2 TWh = $6{,}22 \times 10^{13}$ Wh

531,3 TWh = $5{,}313 \times 10^{14}$ Wh

384,0 TWh = $3{,}84 \times 10^{14}$ Wh

84,6 TWh = $8{,}46 \times 10^{13}$ Wh

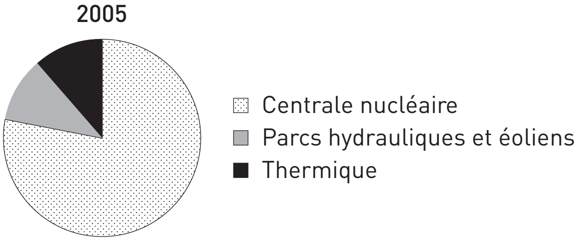
62,7 TWh = $6{,}27 \times 10^{13}$ Wh

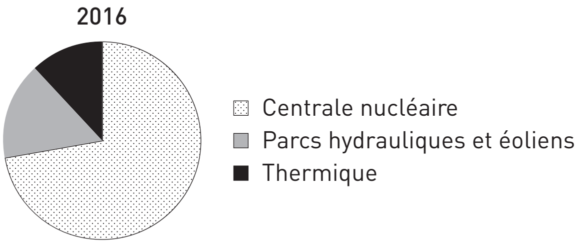
2. Nucléaire : 78,3 %

Hydroélectrique et éolien : 10,4 %

Classique : = 11,4 %

3.





La part de l'énergie nucléaire a baissé au profit des énergies vertes.

Il pourrait être intéressant de poursuivre l'exercice en demandant les pourcentages d'augmentations/réductions et de faire des recherches pour l'année en cours sachant que les mesures sont difficilement comparables.

127. Calculs algébriques et quotients

$\frac{a}{b} = \frac{2}{15}$ $\frac{b}{a} = \frac{15}{2}$ $a \times b = \frac{10}{147}$

$a + b = -\frac{17}{21}$ $a - b = \frac{13}{21}$

128. Quotient de racines carrées

1. *a* est positif pour que $\sqrt{a}$ soit défini. *b* est strictement positif pour que $\sqrt{b}$ et $\frac{a}{b}$ soient définis.

2. Pour démontrer l'égalité, on élève chaque membre de l'égalité au carré.

129. Théorème de Thalès

1. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$

2. $\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{\frac{4}{9}}$

3. $AB = \sqrt{32}$ et $A'B' = \sqrt{72}$

4. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}} = \frac{2}{3}$

130. Racines carrées dans un cube

1. $DG = 4\sqrt{2}$ d'après le théorème de Pythagore dans DCG.

2. $12\sqrt{2}$

3. $KB = 2\sqrt{2}$

Les élèves ne connaissant pas les droites remarquables du triangle, il est nécessaire d'utiliser l'axe de symétrie de la figure pour montrer que K est le milieu de [DB] et appliquer le théorème de Pythagore.

$GK = 2\sqrt{6}$

4. $4\sqrt{12} \approx 13{,}86$

131. $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

1. Si $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, il existe un entier *n* et un entier *a* tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ et donc $10^n = 3a$.

2. 3 étant premier, la décomposition en facteur premier de 10^n est celle de *a* multiplié par 3.

3. $10^n = 3 \times p_1^{n1} \times \ldots \times p_m^{nm}$

Or une décomposition en facteurs premiers est unique et $10^n = 2^n \times 5^n$.

Donc 3 ne peut être un diviseur de 10^n.

L'hypothèse de départ est fausse, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

132. Démonstration d'Euclide

1. *P* n'appartient pas à E car sinon il y aurait un nombre premier supplémentaire.

2. Si *P* n'est pas premier, il existe un entier *k* et un nombre premier *q* tel que $P = kq$.

3. Le reste de la division de *P* par un élément de E est 1, donc *P* n'est pas divisible par un nombre de E.

4. Avec *q*, on a trouvé un nombre premier qui n'appartient pas à E. L'hypothèse « E est un ensemble fini » est donc fausse.

133. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

1. On élève l'égalité au carré.

2 divise p^2, donc p^2 est pair.

2. p^2 étant pair, *p* est pair (voir la démonstration de l'exercice 42).

3. $q^2 = 4p'^2$. q est donc pair également.

La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Cet exercice vient compléter l'activité 4.

Vers la 1re

134. $E = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

Il s'agit de tester la technique de la multiplication par la quantité conjuguée.

135.

Il s'agit de travailler la notion de grandeur produit.

1. Le pouvoir calorifique du charbon est de :

– en kWh : 7 777,78 ;

– en tep : 0,67 environ.

2. 11 611,11 kWh environ

3. 600 000 milliards de kWh

Travaux pratiques p. 64-65

TP 1. Approximation d'une racine carrée

• **Durée estimée :** 50 min

• **Objectif :** Déterminer une approximation d'une racine carrée avec trois outils différents et deux méthodes différentes :

– la calculatrice avec la méthode de la dichotomie ;

– le tableur qui permet d'aller plus loin dans l'approximation et de l'adapter à tout nombre et toute précision voulue ;

– un algorithme programmant la méthode de Héron.

A. 1. $25 < 33 < 36$ donc $5 < \sqrt{33} < 6$.

2. Tableau de valeurs de la fonction carré :

$5{,}7 < \sqrt{33} < 5{,}8$

3. On obtient successivement :

$5{,}74 < \sqrt{33} < 5{,}75$

$5{,}744 < \sqrt{33} < 5{,}745$

B. 1. Voir la feuille de calcul.

2. On doit écrire le pas, c'est-à-dire :

`=(L2-B2)/10`

Pour C2, on écrit la formule : `=B2+$B$1`

3. En B3, on écrit la formule : `=B2*B2` ou `=PRODUIT(B2;B2).`

4. $5{,}7 < \sqrt{33} < 5{,}8$

5. $5{,}74 < \sqrt{33} < 5{,}75$

Il s'agit d'un encadrement au centième.

6. $5{,}744562 < \sqrt{33} < 5{,}744563$

7. $121 < 125 < 144$, donc $11^2 < 125 < 12^2$, donc $11 < \sqrt{125} < 12$.

$123{,}2 < \sqrt{125} < 125{,}4$ donc $11{,}1^2 < \sqrt{125} < 11{,}2^2$ donc $11{,}1 < \sqrt{125} < 11{,}2$.

$124{,}9924 < \sqrt{125} < 125{,}2161$ donc $11{,}18^2 < \sqrt{125} < 11{,}19^2$ donc $11{,}18 < \sqrt{125} < 11{,}19$.

En procédant encore deux fois de cette façon, on trouve : $11{,}1803 < \sqrt{125} < 11{,}1804$.

C. 1. $m_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{33}{5}\right) = 5{,}8$

2. $m_2 = \frac{1}{2}\left(5{,}8 + \frac{33}{5{,}8}\right) = \frac{833}{145}$

3. $m_3 \approx 5{,}744\,562\,653$

$m_4 \approx 5{,}744\,562\,647$

$m_5 \approx 5{,}744\,566\,647$

On remarque que le calcul exact est impossible à partir de la 3e étape et que les résultats approchés sont identiques à partir de la 5e étape. Ainsi, l'utilisation de l'ordinateur plutôt que la calculatrice s'impose pour poursuivre l'algorithme.

4. et **5.**

```
N est un entier
m, n sont des réels
demander N, n
m←n
Tant que sqrt(N)-m<0,0001
       m=0,5*(m+N/m)
Fin tant que
Afficher m
```

6. $121 < 125 < 144$, donc on choisit $n = 11$.

$\sqrt{125} \approx 11{,}1803$

TP 2. Dans le cœur des micros

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser les puissances pour définir une numération différente appliquée à l'informatique.

A. 1.

$1 \to 1$

$2 \to 10$

$3 \to 11$

$4 \to 100$

$5 \to 101$

$6 \to 110$

$7 \to 111$

$8 \to 1000$

$9 \to 1001$

$10 \to 1010$

b) Le nombre proposé est 125.

```
=H2+G2*2+F2*2^2+E2*2^3+D2*2^4+C2*2^5+B2
*2^6+A2*2^7
```

B. 1. 2^8

2. $2^0 + 2^6 = 65$

Cela correspond à la lettre A.

3.

Les élèves peuvent avoir différentes stratégies de résolution suivant leur niveau et leur avancement dans le TP :
– faire une recherche internet
– utiliser un tableur et la fonction DECBIN
– écrire et programmer un algorithme permettant de transformer un nombre décimal en un nombre binaire par une succession de division par 2.

4. La question est libre. Il serait judicieux que les élèves pensent à utiliser la feuille de calcul utilisée en A.

C. 1. A = 1 024

B = 1 048 576

C = 1 073 741 824

2. A est proche de 1 000 octets donc par analogie avec les différents préfixes des systèmes de mesure en décimal (longueurs, masse), on dit que A est égal à 1 kilooctet.

3. Le préfixe *méga*- correspond à 10^6 et *giga* à 10^9.

À noter que l'unité d'enregistrement n'est pas la seule unité en base différente de 10 : le temps universel se mesure en base 60 (h, min, s). Il pourra être intéressant à l'occasion de ce TP de reprendre l'ensemble des grandeurs connues et l'élargir aux grandeurs produites et quotients.

En autonomie p. 66-67

Utiliser les notions de multiples et diviseurs

136. a, **c** et **d** **137. b**, **c** et **d** **138. c**

139. a) 23 est premier.

b) 79 est premier.

c) 91 n'est pas premier ($91 = 7 \times 13$).

140. $276 = 2^2 \times 3 \times 23$

$161 = 7 \times 23$

141. 1. $3\,528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$

$1\,596 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 19$

2. $\dfrac{3528}{1596} = \dfrac{42}{19}$

Calculer avec les puissances

142. b **143. b** **144. a** et **c**

145. b et **d** **146. a**, **b** et **c** **147. b** et **c**

148. b et **c**

149. A = 81 B = – 100 000 C = 0,03125

150. $A = \dfrac{43}{18}$ B = – 102 C = – 1

Calculer avec les quotients

151. b et **d** **152. b** et **d** **153. a**

154. **c** **155.** **b**

156. $A = -\dfrac{81}{34}$ $B = -\dfrac{1}{3}$

157. $A = \dfrac{99}{4}$ $B = \dfrac{937}{144}$

$C = \dfrac{1}{3}$ $D = \dfrac{1907}{45}$

Calculer avec les racines carrées

158. **a** et **c** **159.** **b** **160.** **c**

161. **b**, **c** et **d** **162.** **a** et **d**

163. 1. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$G = 4\sqrt{2}$

2. $H = -18\sqrt{3}$

164. En appliquant quatre fois le théorème de Pythagore, on obtient :

$$2\sqrt{4^2 + 2^2} + 2\sqrt{8^2 + 4^2} = 2\sqrt{20} + 2\sqrt{80}$$
$$= 2\left(\sqrt{4} \times \sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{16} \times \sqrt{5}\right)$$
$$= 2\left(2\sqrt{5}\right) + 2\left(4\sqrt{5}\right) \approx 26{,}8 \text{ cm},$$

soit environ 268 mm.

CHAPITRE 3 Intervalles et inégalités

Manuel p. 68-89

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre permet la poursuite du travail engagé sur les nombres et l'algèbre par la découverte et la manipulation des différents outils en lien avec les inégalités.

Les intervalles : cette partie décrit le fonctionnement des notations jusqu'à un travail sur les intersections et les réunions d'intervalles.

Les inégalités : cette partie traite des règles de manipulation des inégalités à travers des exercices de difficultés différentes et permet notamment de travailler sur les encadrements.

Les inéquations : les règles de manipulation des inégalités sont utilisées pour résoudre des inéquations, de la résolution simple à la modélisation et résolution de problèmes

Valeur absolue : la notion est introduite dans ce chapitre pour le lien qu'elle entretient avec les encadrements, les inégalités et les intervalles en relation avec la distance entre deux nombres.

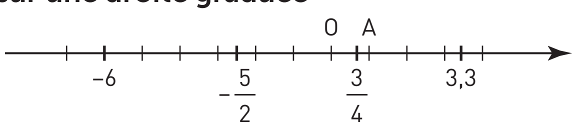
Capacités

- → Utiliser les intervalles.
- → Utiliser des inégalités.
- → Résoudre une équation du 1er degré.
- → Comparer deux quantités en utilisant leur différence.
- → Modéliser un problème par une inéquation.
- → Calculer et interpréter des valeurs absolues.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 69

1. Placer des nombres sur une droite graduée



2. Connaître les symboles liés aux inégalités

a) inférieur

b) supérieur ou égal

c) inférieur

d) inférieur

e) supérieur ou égal

3. Comparer des nombres

a) $-4 > -5$

b) $5{,}5 > -2$

c) $3{,}1425 > 3{,}1326$

d) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

e) $\frac{9}{4} < \frac{37}{16}$

f) $1{,}01 > 1{,}005$

g) $2{,}5 \times 10^{-1} > 0$

h) $-a < a$ avec $a > 0$.

i) $-a > a$ avec $a < 0$.

4. Résoudre des équations

a) $-2x + 6 = 19 \Leftrightarrow -2x = 19 - 6$

$$\Leftrightarrow -2x = 13 \Leftrightarrow x = -\frac{13}{2}$$

Donc $S = \left\{-\frac{13}{2}\right\}$.

b) $4x - 5 = x + 10 \Leftrightarrow 4x - x = 10 + 5$

$$\Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

Donc $\mathscr{S} = \{5\}$.

5. Évaluer et comparer

a) Oui car A = 10 – 3 = 7 si $x = 2$.

b) Non car A = – 3 si $x = 0$.

c) Non car A = – 15 – 3 = – 18 si $x = -3$.

6. Calculer des aires et des périmètres

1. Le périmètre vaut $2 \times 4 + 2 \times 2 = 12$ cm et l'aire vaut $4 \times 2 = 8$ cm^2.

2. L'aire vaut $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{4 \times 6}{2} = 12$ cm^2.

7. Développer une expression

A = $10x + 15 - 2x = 8x + 15$

B = $-3x - 18$

C = $-24 + 8x + 2x + 7 = 10x - 17$

Activités p. 14-17

Activité 1. Introduire la notion d'intervalle

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir la notation d'intervalle en observant différentes manières de les représenter.

Série 1 : 1 7 12 18

Série 2 : 2 9 14 16

Série 3 : 3 10 11 20

Série 4 : 4 6 13 19

Série 5 : 5 8 15 17

Activité 2. Manipuler des inégalités

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir les propriétés de manipulation des inégalités.

1. a)

$3 < 6$; +2 ; +2 ; $5 < 8$

b)

$1 < 3$; –4 ; –4 ; $-3 < -1$

c)

$4 > -2$; +10 ; +10 ; $14 > 8$

2. Si on additionne ou soustrait un même nombre réel à chacun des membres d'une inégalité, alors le sens de l'inégalité ne change pas.

3. a)

$x \geqslant 4$; +5 ; +5 ; $x + 5 \geqslant 9$

b)

$t > 1$; –2 ; –2 ; $t - 2 > -1$

c)

$0 \leqslant x \leqslant 2$; +7 ; +7 ; $7 \leqslant x + 7 \leqslant 9$

4. a) Selma semble avoir raison.

Hari a tort : s'il prend 5, il obtient – 15 qui est inférieur à – 12.

b) • Si on multiplie par un même nombre strictement positif les membres d'une inégalité, alors le sens de l'inégalité ne change pas.

• Si on multiplie par un même nombre strictement négatif les membres d'une inégalité, alors le sens de l'inégalité change.

Les démonstrations de ces conjectures sont dans l'exercice 84 p. 81 du manuel de l'élève et corrigées dans cet ouvrage.

Activité 3. Résoudre une inéquation

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Utiliser les règles de manipulation des inégalités pour résoudre des inéquations.

1. a) $2 \times 5 + 3 = 13 \geqslant 10$ donc l'inégalité est vérifiée : 5 est solution.

b) Par exemple : 4; 8 et $\dfrac{17}{4}$.

c)

$$2x + 3 \geqslant 10 \xrightarrow{-3} 2x \geqslant 7 \xrightarrow{\div 2} x \geqslant 3{,}5$$

d) Ce sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 3,5, on peut l'écrire aussi sous forme d'intervalle [3,5 ; +∞[.

e) 2; 8 et $\frac{17}{4}$ font bien partie de l'ensemble solution.

2. a) $4x - 6 \leqslant -26 \Leftrightarrow 4x \leqslant -20 \Leftrightarrow x \leqslant -5$

b) $-3x + 5 \geqslant 32 \Leftrightarrow -3x \geqslant 27 \Leftrightarrow x \leqslant -9$

c) $2x + 17 < x - 1 \Leftrightarrow 2x < x - 18 \Leftrightarrow x < -18$

Activité 4. Modéliser par une équation

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Modéliser et résoudre un problème en utilisant une inéquation.

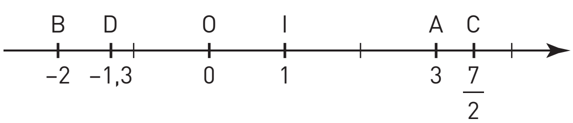
1. $4x + 14 \geqslant 32$

2. $x \in [4{,}5 ; +\infty[$

Activité 5. Découvrir la valeur absolue

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir, manipuler et calculer des valeurs absolues en utilisant les distances.

1.



2. OA = 3 ; OB = 2 ; OC = 3,5 et OD = 1,3.

3 .

```
x=float(input("Saisir l'abscisse de M : "))
if x>=0:
    distance=x
    print("La distance OM est égale à ",distance)
else:
    distance=-x
    print("La distance OM est égale à ",distance)
```

4. $|5| = 5$; $|-3{,}4| = 3{,}4$ et $|2 - \pi| = \pi - 2$.

À vous de jouer ! p. 75-77

1. 1. Non **2.** [2 ; 4]

2. 1.]–3 ; 14[

2.

3. L'intersection est [4 ; 5].
L'union est [–10 ; 12].

4. a) $[10 ; 20[\cap [0 ; 15[= [10 ; 15[$ et $[10 ; 20[\cup [0 ; 15[= [0 ; 20[$.

b) $[0 ; 8[\cap]9{,}5 ; 10] = \varnothing$ et $[0 ; 8[\cup]9{,}5 ; 10]$ ne peut pas se simplifier.

5. $2{,}5t \geqslant 25$ et $t - 7 \geqslant 3$.

6. $-1 < \frac{x}{4} < 0$ et $8 < x + 12 < 12$.

7. $\mathcal{S} =]-\infty ; 4]$

8. $\mathcal{S} =]-\infty ; -12]$

9. a) $\mathcal{S} =]-8 ; +\infty[$

b) $\mathcal{S} =]-1 ; +\infty[$

c) $\mathcal{S} =]-\infty ; 4[$

10. C est supérieur à E pour $x \in]7 ; +\infty[$.
C est inférieur à E pour $x \in]-\infty ; 7[$.
C et E sont égaux pour $x = 7$.

11. R est supérieur à S pour $a \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$.

R est inférieur à S pour $a \in \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$.

R et S sont égaux pour $a = \frac{1}{3}$.

12. 24 viennoiseries

13. La largeur doit être supérieure ou égale à 6,75 cm.

Exercices d'application p. 78-80

Apprendre à apprendre

14. Voir le tableau des intervalles et les symboles $+\infty$ et $-\infty$ p. 72 du manuel de l'élève.

Voir la notation de la valeur absolue p. 74 du manuel de l'élève.

Questions - Flash

16. Par exemple : 8,5 ; 9 et 9,12.

17. a) Oui **b)** Non
c) Oui **d)** Non (borne 10 exclue)

18. $x \in]4 ; 15[$

19. $x \in]-\infty ; 0,1[$

20. $3,2 \in [-3 ; 3,5]$ et $3,2 \in]3,1 ; 3,8]$ donc il appartient à l'intersection (qui est $]3,1 ; 3,5]$).

21. $4c$

22. $R(q) = 5q$

23. $x + 5 < 8 \Leftrightarrow x < 8-5 \Leftrightarrow x < 3$

$\mathcal{S} =]-\infty ; 3[$

24. $-2x + 1 < 9 \Leftrightarrow -2x < 8 \Leftrightarrow x > \dfrac{8}{-2} \Leftrightarrow x > -4$

$\mathcal{S} =]-4 ; +\infty[$

25. a) $3a < 0$ (en multipliant par 3 qui est positif).

b) $a + 6 < 6$ (en ajoutant 6).

c) $-100a > 0$ (en multipliant par -100 qui est négatif).

d) $2a < 0$ (en multipliant par 2 qui est positif) donc $2a + 1 < 1$ (en ajoutant 1).

26. a) $0 < 2x < 10$ (en multipliant par 2 qui est positif).

b) $6 < x + 6 < 11$ (en ajoutant 6).

c) $-3 < x - 3 < 2$ (en soustrayant 3).

d) $0 > -5x > -25$ (en multipliant par -5 qui est négatif).

27. $2l + 2L \leqslant 30 \Leftrightarrow 11 + 2L \leqslant 30$

28. $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

$|-\pi| = \pi$

$|6,75| = 6,75$

29. $|6| - |-7| = 6 - 7 = -1$

Intervalles

30. a) $[-3 ; 1]$ **b)** $]0 ; 5]$
c) $]-\infty ; 4]$ **d)** $]2 ; +\infty[$

31. a)

$[0 ; 3]$

b)

$]-2 ; 1[$

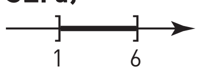
c)

$]-\infty ; 9]$

d)

$]-3,5 ; +\infty]$

32. a)



b)

c)

d)

33. a) $0 \leqslant x \leqslant 1,2$ **b)** $-\frac{5}{3} < x \leqslant 3$

c) $x \geqslant 4,73$ **d)** $x < 0$

34. a) $1,4 \in [0\,;\,7]$ **b)** $-\pi \notin]-3\,;\,-1[$

c) $6 \in \left[\frac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$ **d)** $-3 \notin]-\infty\,;\,-3,5[$

35. a) Oui **b)** Oui **c)** Non

36. a)

Nombre appartient à	I	J	I∩J	I∪J
a) – 10	Non	Non	Non	Non
b) – 6	Oui	Non	Non	Oui
c) – 0,5	Oui	Non	Non	Oui
d) 2	Oui	Non	Non	Oui
e) 8,1	Non	Oui	Non	Oui
f) 99,9	Non	Oui	Non	Oui
g) 1 000	Non	Non	Non	Non
h) 0	Oui	Non	Non	Oui

37. a) $[20\,;\,25[\cap [14\,;\,21[= [20\,;\,21[$ et
$[20\,;\,25[\cup [14\,;\,21[= [14\,;\,25[$.

b) $]-\infty\,;\,7,5] \cap [10\,;\,22] = \varnothing$ et $]-\infty\,;\,7,5] \cup [10\,;\,22]$ ne peut pas se simplifier.

c) $]-1\,;\,+\infty[\cap]-\infty\,;\,1[=]-1\,;\,1[$ et
$]-1\,;\,+\infty[\cup]-\infty\,;\,1[=]-\infty\,;\,+\infty[$.

d) $]0\,;\,1] \cap [0,5\,;\,0,7] = [0,5\,;\,0,7]$ et
$]0\,;\,1] \cup [0,5\,;\,0,7] =]0\,;\,1]$.

38. a) $[-1\,;\,3,5] \cap [1,7\,;\,7] = [1,7\,;\,3,5]$

b) $]-\infty\,;\,-\pi] \cup [-3\pi\,;\,\pi[=]-\infty\,;\,\pi[$

c) $[-7,1\,;\,2] \cap [2\,;\,+\infty[= \{2\}$

d) $[-5\,;\,0] \cup [3\,;\,+\infty[$ ne peut pas se simplifier.

Inégalités

39. a) $1,5x \leqslant 1\,500$ **b)** $\frac{x}{50} \leqslant 20$

c) $-\frac{1}{10}x \geqslant -100$ **d)** $x - 30 \leqslant 970$

40. $3m \leqslant 12$ et $2m - 1 \leqslant 7$.

41. a) $-8 \leqslant x - 10 \leqslant -6$

b) $3 \leqslant 1,5x \leqslant 6$

c) $17 \leqslant x + 15 \leqslant 19$

d) $-8 \geqslant -4x \geqslant -16$

42. a) $2 \leqslant a + 5 \leqslant 6,5$ **b)** $-6 \leqslant 2a \leqslant 3$

c) $-1 \leqslant \frac{a}{3} \leqslant 0,5$ **d)** $-14 \leqslant 2a - 8 \leqslant -5$

e) $13 \geqslant -4a + 1 \geqslant -5$ **f)** $0 \leqslant -4a + 1 \leqslant 2,25$

43. a) $7 < 2t + 1$ **b)** $-9 > -3t$

c) $-\frac{3}{2} > -\frac{t}{2}$ **d)** $3 > 6 - t$

44. a) $2,82 < 2\sqrt{2} < 2,84$

b) $0,91 < \sqrt{2} - 0,5 < 0,92$

c) $4,41 < \sqrt{2} + 3 < 4,42$

d) $2,16 < 5 - 2\sqrt{2} < 2,18$

45. 1. Marco possède entre 130 euros et 190 euros sur son compte.

2. Marco possède entre 50 euros et 110 euros sur son compte.

Équations du 1er degré

46. a) $x = 11$ **b)** $x = \frac{13}{2}$

c) $x = 4$ **d)** $x = 0$

47. a) $x = 12$ **b)** $x = -2$

c) $x = \frac{4}{5}$ **d)** $x = \frac{5}{3}$

e) $x = \frac{30}{7}$ **f)** $x = -1,5$

48. a) $x = -\frac{9}{5}$ **b)** $x = \frac{5}{4}$

c) $x = \frac{10}{11}$ **d)** Pas de solution

e) $x = \frac{63}{68}$ **f)** $x = \frac{3}{2}$

Inéquations du 1[er] degré

49.

$$2x + 8 < 100 \xrightarrow{-8} 2x < 100 - 8$$

$$2x < 92 \xrightarrow{\div 2} x < \frac{92}{2}$$

$$x < 46$$

50. $-4x - 40 > 60$

$-4x > 60 + 40$ (en additionnant 40 à chacun des membres).

$-4x > 100$

$x < \frac{100}{-4}$ (en divisant par (-4) qui est négatif)

$x < -25$

51. a) $x \leqslant 19$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 19]$

b) $x \geqslant -11$ ou $\mathcal{S} = [-11\ ;\ +\infty[$

52. a) $x \leqslant 4$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 4]$

b) $x < -\frac{15}{2}$ ou $\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\frac{15}{2}\right[$

c) $x \geqslant 3$ ou $\mathcal{S} = [3\ ;\ +\infty[$

d) $x \leqslant -36$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -36]$

53. a) $x \leqslant -8$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -8]$

b) $x < -6$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -6[$

c) $x \leqslant 3{,}2$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 3{,}2]$

d) $x > -6$ ou $\mathcal{S} =]-6\ ;\ +\infty[$

54. a) $x < -\frac{3}{4}$ ou $\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\frac{3}{4}\right[$

b) $x \leqslant -5$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -5]$

c) $x > -4$ ou $\mathcal{S} =]-4\ ;\ +\infty[$

d) $x \leqslant 5$ ou $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 5]$

Comparaison

55. $x > 95{,}5$

56. $5 + 2x$ est supérieur à $x + 9$ pour $x \in]4\ ;\ +\infty[$, inférieur pour $x \in]-\infty\ ;\ 4[$ et égal pour $x = 4$.

57. $9 + \frac{1}{2}x$ est supérieur à 1 pour $x \in]-16\ ;\ +\infty[$ inférieur à 1 pour $x \in]-\infty\ ;\ -16[$ et égal à 1 pour $x = -16$.

58. A est supérieur à 0 pour $x \in]-\infty\ ;\ 25[$.

A est inférieur à 0 pour $x \in]25\ ;\ +\infty[$.

A est égal à 0 pour $x = 25$.

59. A est supérieur à 0 pour $x \in \left]-\frac{5}{4} ; +\infty\right[$.

A est inférieur à 0 pour $x \in \left]-\infty ; -\frac{5}{4}\right[$.

A est égal à 0 pour $x = -\frac{5}{4}$.

60. $-2t + 9$ est supérieur à $-2t + 3$ pour tout réel t.

Modélisation

61. $10 + 4\ell \leqslant 120$ avec ℓ la largeur $(\ell \geqslant 0)$.

62. 1. $1{,}50x - 2{,}90 \geqslant 25$

2. $1{,}50x - 2{,}90 \geqslant 25 \Leftrightarrow 1{,}50x \geqslant 27{,}90$

$\Leftrightarrow x \geqslant 18{,}6$

Elle doit vendre au moins 18,6 kg de carottes.

63. 1. Dans le premier cas, la somme cumulée au bout de x mois est $100\,000 + 1\,400x$.

Dans le second cas, la somme cumulée au bout de x mois est $5\,000 + 2\,000x$.

Il s'agit donc de résoudre :

$100\,000 + 1\,400x < 5\,000 + 2\,000x$.

2. $100\,000 + 1\,400x < 5\,000 + 2\,000x \Leftrightarrow 95\,000 < 600x$

$\Leftrightarrow \frac{475}{3} < x$

Il faut donc attendre 159 mois pour que la deuxième offre soit plus intéressante.

64. On résout $2x + 4 + \frac{6x}{2} > 50$, c'est-à-dire $5x + 4 > 50$.

Il faut prendre $x > \frac{46}{5}$.

Valeurs absolues

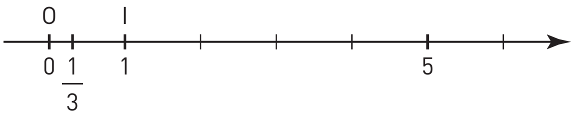
65. a) 4 **b)** 3,8

c) $\frac{100}{3}$ **d)** 1

e) $\sqrt{17} - 2$ **f)** $\sqrt{17} - 2$

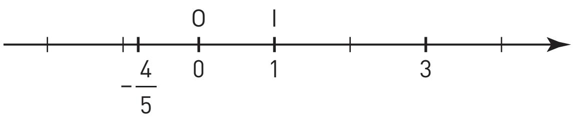
66. a) 7 **b)** 0 **c)** 0 **d)** 14

67. 1. a)



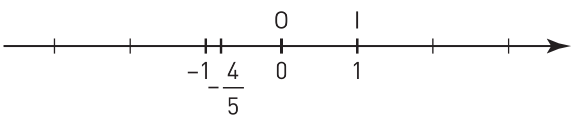
b) La distance vaut $5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$.

2. a)



b) La distance vaut $3 - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{19}{5} = 3{,}8$.

3. a)



b) La distance vaut $-\frac{4}{5} - (-1) = \frac{1}{5}$.

68. a) $\left|\frac{125}{3} - 2\right|$ **b)** $|\sqrt{2} - 5|$

c) $\left|-5 - \frac{12}{5}\right|$ **d)** $|\pi - 4|$

69. a) $5 - \pi$ **b)** $\frac{22}{3}$ **c)** $\frac{5}{2}$

d) 9 **e)** $5 + \pi$ **f)** $\frac{13}{2}$

70. a) La distance entre x et 100.

b) La distance entre x et $\frac{1}{3}$.

c) La distance entre x et -5.

d) La distance entre 1,35 et x.

e) La distance entre -7 et x.

f) La distance entre π et x.

71. Nelson a raison car pour tout nombre réel a on a : $\sqrt{a^2} = |a|$ donc en particulier si $a = x - 1$.

Calculs et automatismes

72. $A = 8x + 47$ $B = 2x - 6$

$C = -11x + 22$ $D = -16x + 31$

73. a) 11 **b)** $\frac{9}{16}$

Exercices d'entraînement p. 81-83

Avec des intervalles

74. a) $[-3\ ;\ 1[$ **b)** $]-\infty\ ;\ -2] \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$

c) $]-\infty\ ;\ 3{,}5]$ **d)** Impossible : $\varnothing$

75. a) Vrai

b) Faux. Contre-exemple : 3,12.

c) Faux. Contre-exemple : 1,5.

d) Vrai.

76. 1. $]-\infty\ ;\ -1] \cup [3\ ;\ +\infty[$

2. Changer la deuxième ligne du programme en `if x<4 or x>5:`.

3. Changer la deuxième ligne du programme en `if x<4 and x >=0:`.

77. 1. a) 95 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{n}$

2. $[1{,}4\ ;\ 1{,}5]$

3. $[3{,}14\ ;\ 3{,}15]$

Inégalités et comparaison

78. a) $\left[\frac{8}{5}\ ;\ \frac{32}{5}\right]$ **b)** $[0\ ;\ 48]$

c) $[-2\ ;\ 4]$ **d)** $[7{,}6\ ;\ 10]$

79. 1. $10{,}535 < m < 10{,}545$

2. $10\,535 < 1\,000\,m < 10\,545$

80. 1. $p = 20\pi$

2. a) $62 < p < 64$

b) $62{,}83 < p < 62{,}832$

3. Dans le deuxième cas, l'amplitude de l'intervalle est 0,002 m soit 0,2 cm.

Si on prend $3{,}141 < \pi < 3{,}142$ on obtient $62{,}82 < p < 62{,}84$.

L'amplitude est alors 0,02 m= 2 cm.

On peut donner p à 1 cm près en prenant $p \approx 62{,}83$.

81. $27\,086 \leqslant R \leqslant 72\,617$

Donc $2\,419{,}06 \leqslant I \leqslant 16\,078{,}36$.

82. Entre 52,5 et 59,5 km.

83. D'après l'énoncé, $89{,}1 \leqslant I \leqslant 90{,}9$ en mA. Donc $0{,}0891 \leqslant I \leqslant 0{,}0909$ en A.

Alors $3{,}564 \leqslant U \leqslant 3{,}636$ en V.

84. 1. a) $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$

b) On a donc $a + c < b + c$.

2. a) $k > 0$ et $b - a > 0$ donc $k(b - a) = kb - ka > 0$ (strictement positif).

b) $ka < kb$

3. Dans ce cas, $k < 0$ et $b - a > 0$,
donc $k(b - a) = kb - ka < 0$ (strictement négatif).

On a donc $ka > kb$.

85. a) $a + b < 7 + 8$ soit $a + b < 15$.

b) $2a + b < 22$

c) $a + 3b < 31$

86. a) $1{,}4 \leqslant x + y \leqslant 4{,}2$

b) $1{,}4 \leqslant x + 3y \leqslant 6{,}2$

c) D'abord $0 \geqslant -y \geqslant -1$ soit $-1 \leqslant -y \leqslant 0$.

Alors $0{,}4 \leqslant x - y \leqslant 3{,}2$.

d) $-0{,}2 \leqslant 2x - 3y \leqslant 6{,}4$

87. 1. $p = 2l + 2L$

$4{,}8 \leqslant 2l \leqslant 5$ et $11{,}08 \leqslant 2L \leqslant 11{,}12$.

Donc $15{,}88 \leqslant p \leqslant 16{,}12$.

2. $15{,}8 \leqslant p \leqslant 16{,}2$

88. 1. a) $A > B$ donc en divisant par $B > 0$, on a $\dfrac{A}{B} > 1$.

b) $C < B$ donc en divisant par $B > 0$, on a $\dfrac{C}{B} < 1$.

2. a) $3\sqrt{2} + 4 > 7$

b) Oui car $3\sqrt{2} + 4 > 7$ et d'après **1.a)**.

3. On a $2x + 7 > 2x + 3 > 0$ car $x > 1$.

Donc $\dfrac{2x + 3}{2x + 7} < 1$ d'après **1.b)**.

89. Le résultat du premier programme en fonction de la valeur saisie t est $4t + 2$.

Le résultat du deuxième programme en fonction de la valeur saisie t est $0{,}5(t + 6) = 0{,}5t + 3$.

Le résultat du premier programme est supérieur à celui du deuxième pour $t \in \left]\dfrac{2}{7} ; +\infty\right[$, inférieur pour $t \in \left]-\infty ; \dfrac{2}{7}\right[$ et les résultats sont égaux pour $t = \dfrac{2}{7}$.

90. 1. Il est positif pour toutes valeurs réelles de x.

2. $2 + x + x^2$ est supérieur à $1 + x$ pour toutes valeurs de x.

Inéquations du 1er degré et problèmes

91. a) $\mathcal{S} = \left]\dfrac{4}{3} ; +\infty\right[$ **b)** $\mathcal{S} =]-\infty ; +\infty[$

c) $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{63}{4} ; +\infty\right[$ **d)** $\mathcal{S} = \left]-\dfrac{25}{14} ; +\infty\right[$

92. Éléonore a tort car on obtient $\dfrac{1}{2} > 21$ ce qui est impossible.

93. Samy a raison car on a :

$-3x + 7 \geqslant 5 - 3x \Leftrightarrow 7 \geqslant 5$, ce qui est vrai pour tous les nombres réels.

94. a) $\mathcal{S} = \varnothing$ (pas de solution) **b)** $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

95. Il s'agit de résoudre : $x \times 1{,}30 = 162{,}5$ ou $x + x \times \dfrac{30}{100} = 162{,}5$.

L'action valait 125 euros un an auparavant.

96. Soit x le nombre de rangées au départ : on résout $(x + 2)^2 = x^2 + 36$.

La compagnie comporte 64 hommes

97. 1. On résout $\frac{(12 - x) \times 8}{2} = \frac{5 + x}{2} \times 8$.

$x = 3{,}5$ pour que les deux aires soient égales.

2. On résout $\frac{(12 - x) \times 8}{2} < \frac{5 + x}{2} \times 8$ donc

$x \in]3{,}5 ; 12]$.

98. Soit x = AM.

1. L'aire de AMNP est x^2, celle de CJNI est :
$(5 - x)(3 - x)$.

On résout $x^2 = (5 - x)(3 - x)$ et on trouve $x = \frac{15}{8}$.

2. Le périmètre de NICJ est :
$2(5 - x) + 2(3 - x) = 16 - 4x$.

On résout $16 - 4x > 10 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$.

99. On résout $\frac{10 + 15 + x + x}{4} > 14$.

Ses notes aux contrôles 3 et 4 ont été supérieures à 15,5.

Valeurs absolues

100. a) $[9 ; 11]$ **b)** $[2{,}3 ; 2{,}7]$ **c)** $[-2 ; 3]$

101. a) $[-8 ; -2]$ **b)** $[-3 ; 1]$ **c)** $]2 ; 4[$

102. 1. a) Centre : 4 et rayon : 2

b) $|x - 4|$ représente la distance entre x et 4.

c) $x \in [2 ; 6] \Leftrightarrow |x - 4| \leqslant 2$

2. a) $x \in [1 ; 25] \Leftrightarrow |x - 13| \leqslant 12$

b) $x \in [6 ; 20] \Leftrightarrow |x - 13| \leqslant 7$

c) $x \in [1{,}2 ; 3] \Leftrightarrow |x - 2{,}1| \leqslant 0{,}9$

103. a) $|x - 0{,}5| \leqslant 4{,}5$

b) $|x - 0{,}55| \leqslant 0{,}55$

c) $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{6}$

104. a) $6 \leqslant x \leqslant 14$

b) $-10 \leqslant x \leqslant 6$

c) $-\frac{16}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{14}{3}$

105. Si $a \geqslant 0$, on a $\sqrt{a^2} = a$ par définition de la racine carrée et donc $\sqrt{a^2} = |a|$ car a positif.

Si $a < 0$, alors $-a$ est positif et on a $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ par définition de la racine carrée et donc $\sqrt{a^2} = |a|$ car $|a| = -a$.

Équations linéaires à deux inconnues

106. 1. $4 \times 1 - 2 \times (-1) = 6$

2. a) Non **b)** Oui **c)** Oui

3. On obtient $16 - 2y = 6$ donc $y = 5$.

4. $y = \frac{4x - 6}{2} = 2x - 3$

107. 1. $3 \times (-1) - 4 = -7$

2. Si $y = -15$ alors $x = \frac{8}{3}$

3. $y = -\frac{11}{2}$

4. $y = -7 - 3x$

108. 1. $4 \times 4 + 12 \times 5 = 76$

2. $x = \frac{98}{5}$

3. $x = \frac{76 - 12y}{4} = 19 - 3y$

4. $y = \frac{76 - 4x}{12} = \frac{19}{3} - \frac{1}{3}x$

Travailler autrement

109. 1. 9 **2.** 4 **3.** 11
4. 2 **5.** $x < 1$ **6.** 0

110. Il s'agit de comparer l'aire du nouveau jardin de Lou $(5 + x)(6 + x)$ et celle du nouveau jardin d'Harry : $(2 + x)(12{,}5 + x)$.

La surface du jardin de Lou est supérieure à celle du jardin d'Harry pour $0{,}50 \leqslant x < \frac{10}{7}$, égale pour $x = \frac{10}{7}$, et inférieure pour $5 \geqslant x > \frac{10}{7}$.

Exercices bilan p. 84

111. Les bons intervalles

a) $]-\infty\,;\,7[$ **b)** $]1\,;\,101]$
c) $[-2\,;\,5]$ **d)** $[0\,;\,9[$
e) $[7\,;\,15]$ **f)** $]-\infty\,;\,0[$
g) $[-17\,;\,3]$ **h)** $\left[\frac{9}{5}\,;\,+\infty\right[$

112. Solutions diverses

1. Oui pour les deux.

2. Par exemple 0 car $6 \geqslant 0$ et $11 \geqslant 0$.

3. $4x + 6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1{,}5$

$-2x + 11 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{11}{2}$

4. Par exemple 6.

113. Fabrication artisanale de jus de fruit

1. a) `=149+A2*0.80`

b) `=2.40*A2`

2. a) $2{,}40x \geqslant 149 + 0{,}80x$ pour que les recettes soient supérieures ou égales au coût.

b) $x > 93{,}125$. Ayoub doit vendre plus de 93,125 litres de jus de fruit.

3. `=C2-B2`

114. Comparaison d'aires

1. $x \in [0\,;\,10]$

2. Il s'agit de résoudre $\frac{8(10-x)}{2} \leqslant 8x$.

Cela est vrai pour $x \geqslant \frac{10}{3}$.

Comme $x \leqslant 10$, $\mathscr{S} = \left[\frac{10}{3}\,;\,10\right]$.

115. Distances et valeur absolue

1. a) 2,5 **b)** 9,5

2. Non car par exemple pour $x = 2$, on a :
$|2 - 2{,}5| = 0{,}5$ et $2 + 2{,}5 = 4{,}5$.

3 .

```
x=float(input("Saisir  x : "))
if x>=2,5:
    distance=x-2,5
else:
    distance=2,5-x
print(distance)
```

116. Écriture d'un programme

1. a) $]-19\,;\,+\infty[$

b)

```
Saisir a
Saisir b
Saisir c
solut←(c-b)/a
Si a<0
   Afficher "S=]solut;+infini["
Sinon
   Afficher "S=]-infini;solut["
Fin si
```

2.

```
Saisir a
Saisir b
Saisir c
Saisir d
Si a=c et b<d
   Afficher "tous les nombres sont
solutions"
Fin si
Si a=c et b≥d
   Afficher "pas de solution"
Fin si
Si a≠c
   solut←(d-b)/(a-c)
   Si a<c
      Afficher "S=]solut;+infini["
   Sinon
      Afficher "S=]-infini;solut["
   Fin si
Fin si
```

Exercices d'approfondissement p. 84

117. Somme d'inégalités

1. $a + c < b + c$

2. $b + c < b + d$

3. On en déduit que $a + c < b + d$.

118. Multiplication d'inégalités(1)

1. $ac < bc$ car c strictement positif.

2. $bc < bd$ car b strictement positif.

3. $ac < bd$

La propriété s'énonce ainsi :

Si a, b, c et d sont quatre nombres strictement positifs tels que $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$.

4. Si $a = -2$ et $b = -1$ et $c = -4$ et $d = 2$, alors $ac = 8$, $bd = -2$ donc nous n'avons pas $ac < bd$.

119. Multiplication d'inégalités(2)

1. Elle est comprise entre :

$6\,352 \times 3{,}14 = 19\,945{,}28$ et

$6\,385 \times 3{,}15 = 20\,112{,}75$ km.

2. Il doit mobiliser entre $35 \times 2 = 70$ et

$50 \times 10 = 500$ minutes.

3. Le volume de sang prélevé est compris entre 0,049 et 0,051 L.

La masse de glucose est comprise entre $0{,}74 \times 0{,}049 = 0{,}036\,26$ g et $1{,}06 \times 0{,}051 = 0{,}054\,06$ g

120. Vrai ou faux?

Propriété 1. Fausse, par exemple en prenant

$a = 2$ et $b = -4$, l'égalité n'est pas vérifiée.

Propriété 2. Vraie, par exemple en prenant

$a = 0$ et $b = 1$, l'égalité est vérifiée.

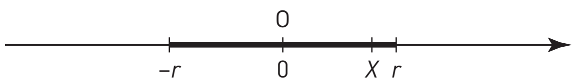
Propriété 3. Vraie, car si $a \geqslant 0$ alors

$|-a| = a = |a|$ et si $a < 0$ alors $|-a| = -a = |a|$ car $-a$ est positif.

121. Valeurs absolues et intervalles

1. $|X| \leqslant r$ signifie que la distance entre 0 et X est inférieure ou égale à r.

Graphiquement :



Donc $|X| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant X \leqslant r$.

2. $x \in [a - r\,;\, a + r] \Leftrightarrow a - r \leqslant x \leqslant a + r$

$\Leftrightarrow -r \leqslant x - a \leqslant r$

$\Leftrightarrow |x - a| \leqslant r$

122. Systèmes d'inéquations

$$\begin{cases} 3x + 100 > 172 \\ 100 + 50x \geqslant 75x - 627 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 24 \\ 29{,}08 \geqslant x \end{cases}$$

Les solutions sont 26 et 28.

123. Valeurs absolues et (in)équations

1. 4 et –4.

2. a) $|x - 10|$ est la distance entre x et 10.

b) 11,5 et 8,5

3. a) $x = 7$ ou $x = -1$

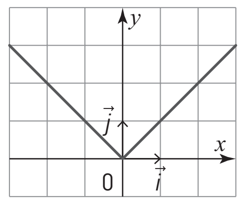
b) $x = 7$ ou $x = -17$

4. a) $\mathscr{S} =]-3{,}3\,;\,-2{,}7[$

b) $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,8{,}9] \cup [11{,}1\,;\,+\infty[$

Vers la 1re

124.



125. 1. 2021 pour $n = 3$ donc $p(3) = 22\,530$.

2. On résout $p(n) > 25\,000$ et on obtient $n > \dfrac{400}{51}$ avec $\dfrac{400}{51} \approx 7{,}8$.

C'est donc pour $n = 8$ soit en 2026.

Travaux pratiques p. 86-87

TP1. Recherche d'un lieu de points

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Chercher les solutions à un problème à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique puis de manière algébrique.

A ►Conjecture avec un logiciel

3. D'après le logiciel, il faut prendre $a > 1{,}34$.

B ►Résolution algébrique

1. Soit AM = a.

Dans le triangle ABC, (MN) est parallèle à (AC), (CN) et (AM) sont sécantes en B.

D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{MN}{AC}$.

Alors $MN = \dfrac{BM \times AC}{BA} = \dfrac{(4 - a) \times 7}{4} = 7 - \dfrac{7}{4}a = 7 - 1{,}75a$.

Le périmètre de AMNP vaut donc :

$$2a + 2(7 - 1{,}75a)$$

On résout donc $2a + 2(7 - 1{,}75a) \leqslant 12$.

2. On obtient $a \geqslant \frac{4}{3}$ (cohérent avec le résultat observé).

TP 2. Comparaison à l'aide du tableur

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Chercher les solutions à un problème à l'aide du tableur puis de manière algébrique.

A ►Conjecture avec un tableur

2. En B7 : `=B6+1300` et en C7 : `=C6+1680`

3. Pour l'année numéro 9.

B ►Résolution algébrique

1. Le salaire dans l'entreprise A est donné par

`24000+1300*(n-1)=22700+1300n`

$n - 1$ car par exemple pour l'année 2, il n'y a eu qu'une seule augmentation, etc.

2. Le salaire dans l'entreprise B est donné par

`21000+1680*(n-1)=19320+1680n`

On résout donc $19\,320 + 1\,680\,n > 22\,700 + 1300\,n$.

3. $19\,320 + 1\,680n > 22\,700 + 1\,300n \Leftrightarrow n > \frac{169}{19}$ soit $n \geqslant 8{,}9$.

Donc c'est bien à partir de l'année 9.

4. C'est l'année numéro 17.

En autonomie

Travailler avec des intervalles

126. **c** **127.** **b**

128. **d** **129.** **b**

130. **b** et **d**

131.

1 .

2. – 1 ; 0 ; 1,2 et 3,32 par exemple.

3. 10 ; – 6 ; 3,6 et 12 par exemple.

132. **a)** $-3 \leqslant x \leqslant 16$ **b)** $x \geqslant -8$

133. **a)** $]5\,;\,12]$ **b)** $]-\infty\,;\,4]$ **c)** $]-1\,;\,0[$

134. Faux

135. L'intersection est $]-3\,;\,5[$ et la réunion est $[-3\,;\,8]$.

Manipuler des inégalités et des inéquations

136. **d** **137.** **a** **138.** **a**

139. **a)** $]8\,;\,+\infty[$ **b)** $]-\infty\,;\,0{,}5[$
c) $]-\infty\,;\,20]$ **d)** $]-\infty\,;\,-1[$

140. $-10 < 5x \leqslant 50$
$-14 < x - 12 \leqslant -2$

141. $1{,}2 < \sqrt{5} - 1 < 1{,}3$
$11 < 5\sqrt{5} < 11{,}5$

142. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{648}{35}\right]$

143. $\mathcal{S} = \left[\frac{10}{17}\,;\,+\infty\right[$

144. Vrai

145. $x \in \left]-\frac{24}{5}\,;\,-\frac{5}{2}\right[$

Modéliser par une équation

146. **b** **147.** **b**

148. **1.** $x \in [0\,;\,10]$
2. $50 - 2x$
3. $50 - 2x \geqslant 37$

149. Par exemple $[-5\,;\,8]$

150. Une inéquation est $500p - 125 > 750$ avec p le prix de vente du ticket.

On doit prendre $p > 1{,}75$.

151. Le nombre de départ de Jeanne est inférieur à 2.

152. $a \in \left[8\sqrt{3}\ ;+\infty\right[$

Calculer et interpréter des valeurs absolues

153. **b** **154.** **a**

155. **b** **156.** **c**

157. $|x - 3|$

158. **1.** 12 **2.** $\frac{16}{3}$ **3.** Non

159. **a)** $12 - \sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{7} + 3$ **c)** $\sqrt{7} - 2$

160. $[-16\ ;8]$

161. $\left[-\frac{3}{10}\ ;\frac{7}{10}\right]$

CHAPITRE 4 Identités remarquables, calculs algébriques et équations

Manuel p. 91-111

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre reprend le travail commencé au collège sur l'algèbre et le complète, notamment par l'apport des identités remarquables et de résultats sur la résolution d'équations nouvelles.

Identités remarquables, développement, factorisation : après avoir introduit les trois identités remarquables, le travail porte sur l'entraînement au calcul algébrique, une reprise et poursuite du travail engagé au collège.

Résolution algébrique d'équations : il s'agit de faire une synthèse sur les différentes nouvelles équations (équation produit, équation quotient, équation $x^2 = a$, ...) de la simple résolution à la résolution de problèmes. Cette partie pourra servir dans d'autres chapitres.

Capacités

- → Développer, factoriser une expression.
- → Utiliser les identités remarquables.
- → Transformer des expressions fractionnaires simples.
- → Résoudre une équation produit nul.
- → Résoudre une équation quotient.
- → Résoudre des équations du type $x^2 = k$, $\sqrt{x} = k$, $\frac{1}{x} = k^2$.
- → Résoudre algébriquement un problème associé à une équation.
- → Travailler sur des expressions ou des relations simples.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 91

1. Repérer des formes développées

B et D.

2. Développer des expressions

$A = 4 \times 5x - 4 \times 7$
$= 20x - 28$

$B = -2x \times 3 - 2x \times (-5x)$
$= -6x + 10x^2 = 10x^2 - 6x$

$C = 4x + x^2 + 12 + 3x$
$= x^2 + 7x + 12$

$D = -2x \times 5 - 2x \times (-3x) + 4 \times 5 + 4 \times (-3x)$
$= -10x + 6x^2 + 20 - 12x$
$= 6x^2 - 22x + 20$

3. Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

1. a) Oui car $-16 + 3 \times 5 = -1$ et $-2 \times 5 + 9 = -1$.

b) Non car $5^2 + 5 = 30 \neq 0$.

c) Oui car $(5 - 5)(5 + 7) = 0$.

2. a) Non car $9 + 3 \times (-2) = 3$ et $-2 \times (-2) + 1 = 5$.

b) Oui car $-2 \times (-2)^2 + 8 = 0$.

c) Non car $2 \times (-2) \times (6 \times (-2) - 4) = 64 \neq 0$.

4. Résoudre des équations du 1^er^ degré

a) $7x + 21 = 0 \Leftrightarrow 7x = -21$
$\Leftrightarrow x = -\frac{21}{7} \Leftrightarrow x = -3$

b) $-3x + 5 = 9 - 5x \Leftrightarrow -3x + 5x = 9 - 5$
$\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2$

c) $3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{3} \Leftrightarrow x = 0$

d) $\frac{2}{3}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 5 \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$

5. Calculer avec des fractions

a) $5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$

b) $2 - \frac{1}{7} = \frac{14}{7} - \frac{1}{7} = \frac{13}{7}$

6. Chercher des antécédents

a) $2x + 6 = 2 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$

Donc l'antécédent de 2 est -2.

b) $2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$

Donc l'antécédent de 0 est -3.

c) $2x + 6 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{15}{2} - 6$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

Donc l'antécédent de $\frac{15}{2}$ est $\frac{3}{4}$.

7. Utiliser un tableur

a) `=3*A2` **b)** `=A2^2-2` **c)** `=B2+C2`

Activités

p. 92-93

Activité 1. Découvrir les identités remarquables

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** Découvrir les trois identités remarquables et présenter l'illustration géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1. Ethan a tort car les colonnes B et C ne donnent pas les mêmes résultats.

2. En B2 : `=(A2+3)^2`

En C2 : `=A2^2+9`

En D2 : `=B2-C2` par exemple

3. On conjecture que les résultats de la colonne D sont donnés par la multiplication par 6 des nombres de la colonne A.

Donc $(x + 3)^2 - (x^2 + 9) = 6x$ et donc $(x + 3)^2 = x^2 + 9 + 6x$.

4. $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$

$= x^2 + 3x + 3x + 9$

$= x^2 + 6x + 9$

5. Oui

6. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

7. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

8. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

9. a) Le côté du grand carré est $a + b$ donc l'aire est $(a + b)^2$.

b) Le carré rose a une aire égale à a^2, le carré vert une aire égale à b^2. Les deux rectangles gris ont une aire de $a \times b = ab$.

On a donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: c'est l'identité remarquable de la question **6.**

Activité 2. Résoudre algébriquement un problème avec une équation

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Chercher des solutions d'équations : degré 1, règle du produit nul, de type $a^2 = b^2$. Pour certaines cela représente du rappel ; pour les dernières, il s'agit d'une introduction et d'une réflexion autour de nouvelles méthodes.

1. En posant x le nombre de Kader, il s'agit de résoudre $2x + 4 = 3x - 7$.

Le seul nombre possible est 11.

2. En posant x le nombre de Kader, il s'agit de résoudre $2x + 4 = 3 \times (-x) - 7$.

Le seul nombre possible est $-\frac{11}{5} = -2{,}2$ pour Kader et 2,2 pour Sophie.

3. En posant x le nombre de Kader, il s'agit de résoudre $(2x + 4)(3x - 7) = 0$.

Cela est possible si et seulement si $2x + 4 = 0$ ou $3x - 7 = 0$.

Les solutions sont donc $x = -2$ et $x = \frac{7}{3}$.

4. En posant x le nombre de Kader, il s'agit de résoudre $(2x + 4)^2 = (3x - 7)^2$.

$(2x + 4)^2 = (3x - 7)^2$

$\Leftrightarrow (2x + 4)^2 - (3x - 7)^2 = 0$

$\Leftrightarrow ((2x + 4) + (3x - 7))((2x + 4) - (3x - 7)) = 0$

$\Leftrightarrow (5x - 3)(-x + 11) = 0$

en utilisant les identités remarquables.

Les solutions sont donc $\frac{3}{5}$ et 11.

Activité 3. Travailler avec une expression fractionnaire

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Comprendre les calculs utilisant des expressions fractionnaires avec des indéterminées, et notamment la notion de « valeur interdite ».

1. Pour $x = 2$, $A = \frac{18}{4}$ et pour $x = -3$, $A = -3$.

2. a) Non, car il faudrait diviser par 0.

b) Non

3. a) On peut conjecturer que $A = 3 + \frac{6}{x+2}$.

b) $3 + \frac{6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} + \frac{6}{x+2} = \frac{3x+6+6}{x+2} = A$

Activité 4. Résoudre des équations produits et des équations quotients

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la résolution des équations quotients. Toutes les équations ne sont pas à résoudre mais peuvent permettre de se ré-entraîner si besoin.

1. Les équations ① (produit nul), ② (degré 1), ③ (factorisation puis produit nul), ④ (degré 1), ⑤ (degré 1), ⑦ (degré 2 du type $x^2 = a$) et ⑨ (produit nul).

2. a) $x \neq 1$ pour que le dénominateur ne s'annule pas.

b) 0

c) Il faut que $x + 2 = 0$ c'est-à-dire $x = -2$.

3. $\frac{3x}{x+2} = 2 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+2} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x - 2(x+2)}{x+2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} = 0$

Tout d'abord on peut préciser que $x \neq -2$.

Pour que la fraction s'annule, il faut que $x - 4 = 0$ donc $x = 4$ qui est différent de -2.

La solution est 4.

Activité 5. Modéliser un problème avec une équation

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Chercher la solution d'un problème, par exemple en modélisant par une équation-quotient à résoudre.

Dans cette configuration de Thalès, pour que les deux droites soient parallèles, il faut que $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{5}$.

$\frac{x}{x+4} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{x+4} - \frac{3}{5} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x - 3(x+4)}{5(x+4)} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2x - 12}{5(x+4)} = 0$

La valeur interdite est -4.

Il faut que $x = 6$.

La solution est 6.

À vous de jouer ! p. 97-99

1. a) $2x^2 + 17x + 21$ **b)** $x^2 - 2x + 1$

c) $4x^2 + 12x + 9$ **d)** $-x^2 + 6x - 5$

2. a) $2x^2 + 8x - 6$ **b)** $9t^2 - 30t + 25$

c) $x^2 - 200$ **d)** $3x^2 + 30x + 75$

3. a) $(2x + 1)(-3x + 9)$ **b)** $(x + 2)^2$

c) $(6 - x)(6 + x)$ **d)** $x(x + 4)$

4. a) $(x - 3)^2$ **b)** $(x + 10)^2$

c) $4x(2x - 6)$ **d)** $5x(x - 3)$

5. $\frac{10x + 51}{2x + 10}$

6. $\frac{9x - 30}{x - 3}$

7. $\mathscr{S} = \left\{-\frac{9}{5} ; 50\right\}$

8. On factorise d'abord le membre de gauche : $(5-x)(-x-3)=0$ donc $\mathcal{S}=\{-3\,;5\}$.

9. On factorise d'abord le membre de gauche : $(x+2)^2=0$ donc $\mathcal{S}=\{-2\}$.

10. On factorise d'abord le membre de gauche : $x(8x-1)=0$ donc $\mathcal{S}=\left\{0\,;\frac{1}{8}\right\}$.

11. $\mathcal{S}=\{-3\}$ (la valeur interdite est -1).

12. L'équation est équivalente à $\frac{-2x-19}{x+5}=0$ donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{19}{2}\right\}$ (la valeur interdite est -5).

13. L'équation est équivalente à $\frac{-x-2}{x+1}=0$ donc $\mathcal{S}=\{-2\}$ (la valeur interdite est -1).

14. a) L'équation est équivalente à $\frac{-7x-12}{x+2}=0$ donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{12}{7}\right\}$ (La valeur interdite est -2).

b) L'équation est équivalente à $1=8(2x+4)$ et $x\neq-2$ donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{31}{16}\right\}$ (la valeur interdite est -2).

Exercices d'application p. 100-101

Apprendre à apprendre

16. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Questions – Flash

18. $A=3x(x-10)=3x^2-30x$

$B=(x+8)^2=x^2+2\times x\times 8+8^2$

$=x^2+16x+64$

19. $(x-10)^2=x^2-20x+100$

20. $A=3x^2+x=x(3x+1)$

$B=5x^2-x=x(5x-1)$

21. $A=x^2-25=x-5^2=(x-5)(x+5)$

$B=4x^2+12x+9$

$=(2x)^2+2\times2x\times3+3^2=(2x+3)^2$

22. $A=(2x+1)(3x+2)+(4x+7)(2x+1)$

$=(2x+1)((3x+2)+(4x+7))$

$=(2x+1)(3x+2+4x+7)$

$=(2x+1)(7x+9)$

23. a) $(x-3)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+2=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-2$

Donc $\mathcal{S}=\{-2\,;3\}$.

b) $(x-3)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x-4=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=4$

Donc $\mathcal{S}=\{3\,;4\}$.

c) $(2x+3)(1-x)=0$

$\Leftrightarrow 2x+3=0$ ou $1-x=0$

$\Leftrightarrow 2x=-3$ ou $-x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ ou $x=1$

Donc $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;1\right\}$.

d) $x(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x+1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

Donc $\mathcal{S}=\{-1\,;0\}$.

24. a) $x^2=9$ donc $\mathcal{S}=\{3\,;-3\}$.

b) $x^2-16=0\Leftrightarrow x^2=16$

donc $\mathcal{S}=\{4\,;-4\}$.

c) $x^2+4=0\Leftrightarrow x^2=-4$: pas de solutions réelles.

25. $(2x-20)(5x+7)=0$

$\Leftrightarrow 2x-20=0$ ou $5x+7=0$

$\Leftrightarrow 2x=20$ ou $5x=-7$

$\Leftrightarrow x=10$ ou $x=-\frac{7}{5}$

Donc l'expression s'annule pour $x=10$ ou $x=-\frac{7}{5}$.

26. $x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=8$

Donc l'expression s'annule pour $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$.

27. L'expression n'est pas définie si le dénominateur s'annule, c'est-à-dire si $2x - 2 = 0$.

$2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Elle n'est pas définie pour $x = 1$.

28. Sous la condition $x \neq 1$ (voir l'exercice précédent), l'expression s'annule si le numérateur s'annule, c'est-à-dire si $-4 + x = 0$.

$-4 + x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Elle s'annule pour $x = 4$

29. $A = \frac{6x+15}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{15}{3} = 2x + 5$

$B = \frac{9x^2+6x}{3x} = \frac{9x^2}{3x} + \frac{6x}{3x} = 3x + 2$ pour $x \neq 0$.

30. $\sqrt{x} = 10 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$

Développer des expressions

31. a) $3x^2 + 15x$ **b)** $-2x^2 - 12x$
c) $15x^2 - 12x$ **d)** $2x^2 + 3x + 1$
e) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ **f)** $-6x^4 + 2x^2$

32. a) $x^2 + 4x + 15$ **b)** $3x^2 + 5x$
c) $-2t^2 + 5t + 13$ **d)** $x^3 + 16x^2 - 2x$

33. a) $x^2 + 24x + 144$ **b)** $9x^2 - 1$
c) $36 - 12x + x^2$ **d)** $2x^2 - 2x + 5$

34. a) $(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$
b) $(x + 9)(x - 9) = x^2 - 81$
c) $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$

35. a) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ **b)** $9x^2 - 2x + \frac{1}{9}$
c) $x^2 - \frac{4}{25}$ **d)** $a^2 + 2\sqrt{5}a + 5$

Factoriser des expressions

36. a) $3(x - 5)$ **b)** $x(4x - 7)$
c) $x(3x^2 - 5x + 8)$ **d)** $3a(a - 2)$
e) $3x^2(x + 3)$ **f)** $\sqrt{x}(2 + x)$

37. a) $(2x - 3)(2x + 2)$
b) $(15x + 7)(11x + 8)$
c) $(7x - 26)(23x + 12)$
d) $(13t + 5)(-13t + 17)$

38. a) $x^2 - 121 = (x + 11)(x - 11)$
b) $(3y + 2)^2$
c) $(x - 13)^2$
d) $(12x + 6)^2$
e) $(5x + 1)(x + 1)$
f) $(3t - 4)^2$
g) $(11x - 1)^2$
h) $(x + 1 + 3)(x + 1 - 3) = (x + 4)(x - 2)$

39. a) $(2x + 5)(3x - 6)$ (facteur commun)
b) $(3t + 8)(3t - 8)$ (identité remarquable)
c) $(5x + 3)^2$ (identité remarquable)
d) $(3x - 2)(4x + 1)$ (facteur commun)

Simplifier des écritures fractionnaires

40. a) $t + 5$ **b)** $\frac{3}{4}x$ pour $x \neq 0$
c) $2x^2 + 4x - 3$ **d)** $\frac{1}{2a}$

41. a) $\frac{5x+43}{x+8}$
b) $\frac{-2x-3}{x+1}$
c) $\frac{5x^2+3}{x^2+1}$
d) $\frac{2(4x+1)}{2(x-4)} - \frac{3(x-4)}{2(x-4)} = \frac{5x+14}{2(x-4)}$

42. a) $\frac{-x^2+2x}{x+1}$ **b)** $\frac{4x^2-5x-4}{x-2}$
c) $\frac{-2x^2+x-6}{x^2+2}$ **d)** $\frac{5x-12}{x(x-4)}$

43. a) 2

b) $\dfrac{5x}{2-x}$

c) $2x+3$

d) $5t+3$

e) 3

Résoudre des équations

44. a) $\mathcal{S}=\{-4\ ;\ 7\}$ **b)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\dfrac{5}{4}\right\}$

c) $\mathcal{S}=\left\{0\ ;\dfrac{5}{4}\right\}$ **d)** $\mathcal{S}=\left\{-3\ ;\dfrac{1}{5}\right\}$

e) $\mathcal{S}=\{2\}$ **f)** $\mathcal{S}=\{0\ ;\ 5\}$

45. 1. $(x+4)(x-4)$

2. $x=-4$ ou $x=4$

46. a) $5x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(5x-6)=0$

$\mathcal{S}=\left\{0\ ;\dfrac{6}{5}\right\}$

b) $(2x+1)(x+4)+(x+4)(3-5x)=0$

$\Leftrightarrow (x+4)(-3x+4)=0$

$\mathcal{S}=\left\{-4\ ;\dfrac{4}{3}\right\}$

c) $(x-7)(3x-5)-(9x-4)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow (x-7)(-6x-1)=0$

$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{6}\ ;7\right\}$

d) $4x^2+8x+4=0 \Leftrightarrow (2x+2)^2=0$

$\mathcal{S}=\{-1\}$

e) $(4x-7)(9x+5)=(8x-3)(4x-7)$

$\Leftrightarrow (4x-7)(x+8)=0$

$\mathcal{S}=\left\{-8\ ;\dfrac{7}{4}\right\}$

47. a) $\mathcal{S}=\{-9\ ;\ 9\}$ **b)** $\mathcal{S}=\varnothing$

c) $\mathcal{S}=\left\{-\sqrt{15}\ ;\sqrt{15}\right\}$ **d)** $\mathcal{S}=\{-4\ ;\ 4\}$

e) $\mathcal{S}=\varnothing$ **f)** $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

48. a) $x^2+6x+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2=0$

$\mathcal{S}=\{-3\}$

b) $36x^2-12x+22=21 \Leftrightarrow (6x-1)^2=0$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{6}\right\}$

c) $4x^2=8x \Leftrightarrow 4x(x-2)=0$

$\mathcal{S}=\{0\ ;\ 2\}$

d) $5(2x+1)^2=20 \Leftrightarrow (2x+1)^2=4$

$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\dfrac{1}{2}\right\}$

e) $(3x+4)^2=(5x-6)^2 \Leftrightarrow (8x-2)(-2x+10)=0$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{4}\ ;5\right\}$

f) $(x-2)^2-100=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=100$

$\mathcal{S}=\{-8\ ;\ 12\}$

49. a) $x=144$ **b)** Pas de solution

c) $x=132{,}25$ **d)** $x=49$

50. a) $x=2$

b) $x=\dfrac{7}{2}$

c) $20-4x=0 \Leftrightarrow x=5$ qui est la valeur interdite donc pas de solution.

d) $x=\dfrac{1}{5}$

51. On peut utiliser toutes les techniques de l'exercice résolu 5 p. 99 du manuel.

a) $\dfrac{2x-1}{x+6}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{x+6}=0$

$\mathcal{S}=\{7\}$

b) $\dfrac{4}{2x+6}=9 \Leftrightarrow 4=9(2x+6)$ et $x\neq -3$.

$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{25}{9}\right\}$

c) $\dfrac{2x}{x-4}=-3 \Leftrightarrow \dfrac{5x-12}{x-4}=0$

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{12}{5}\right\}$

d) $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+1)=x-1$ et $x \neq 1$.

$\mathscr{S}=\{-3\}$

52. a) $\dfrac{x}{2x+2}+5=0 \Leftrightarrow \dfrac{11x+10}{2x+2}=0$

$\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{10}{11}\right\}$

b) $\dfrac{10+x}{x-2}-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+14}{x-2}=0$

$\mathscr{S}=\{14\}$

c) $\dfrac{3}{2x-4}=-5 \Leftrightarrow 3=-5(2x-4)$ et $x \neq 2$.

$\mathscr{S}=\left\{\dfrac{17}{10}\right\}$

d) $\dfrac{x+1}{3-x}=1 \Leftrightarrow x+1=3-x$ et $x \neq 3$.

$\mathscr{S}=\{1\}$

53. a) $\dfrac{1}{4}$ **b)** -1

c) $\dfrac{1}{10}$ **d)** 3

e) Pas de solution **f)** -5

Calculs et automatismes

54. a) 77 **b)** 5 **c)** 14 **d)** 1,5

55. a) 10 **b)** 4 **c)** 160 **d)** $12+5\sqrt{2}$

56. 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; 225

Exercices d'entraînement

p. 102-104

Calcul littéral

57. a) $-7x^2-7x-10$ **b)** $-12x^2+48x-36$

c) $10x^2+32x+6$ **d)** $-2x^3+4x^2-2x+4$

58. a) $x^2+12x+4$ **b)** $16x^2-48x+36$

c) $3t^2-12t+13$ **d)** $-2x^2-12x-25$

59. En développant, on a :

A = $4t^2-16t+28$

B = $4t^2-16t+28$

C = $4t^2-16t+28$

d'où l'égalité des 3 expressions.

60. a) $x^2+16x+53$ **b)** $-3x^2+24x-37$

c) $-5x^2-30x-50$ **d)** x^3-3x+2

61. a) $3+2\sqrt{2}$ **b)** $11-6\sqrt{2}$

c) $24+16\sqrt{2}$ **d)** 14

62.

a) $(23x+1)(6x+2)$

b) $(13x-14)(12x+3)$

c) $(8-18x)(-34x+11)$

d) $(16t+13)(21t-1)$

e) $(-14x+5)(-4x+8)$

63. a) $(x-4)^2-6^2=(x+2)(x-10)$

b) $y^2-\sqrt{5}^{\,2}=\left(y+\sqrt{5}\right)\left(y-\sqrt{5}\right)$

c) $5^2-(2-x)^2=(7-x)(3+x)$

d) $(3x+7)(-x-1)$

64. a) $7a^2(a+4)$

b) $\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{9}\right)\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{9}\right)$

c) $2(9x^2-24x+16)=2(3x-4)^2$

d) $2(x^2-2)=\left(2x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$

65. A = $6(x+7)(x-7)$

B = $\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$

C = $(5+4x)(7-7x)$

D = $\sqrt{x}(4x+13)$

E = $2xy(4x-2y+3)$

66. 1. $4x$

2. En prenant x = 10 000 dans la formule de la question précédente, le résultat est 40 000.

67. 1. `=2(A2^2+1)^2+3`

2. a) Conjecture : $f(x) - g(x) = 5$ pour tout réel x.

b) $f(x) - g(x) = 2(x^2 + 1)^2 + 3 - 2(x^4 + 2x^2)$

$= 2(x^4 + 2x^2 + 1) + 3 - 2x^4 - 4x^2$

$= 2 + 3 = 5$

68. D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc $(x + 7)^2 - 5^2 = AB^2$.

Donc $AB^2 = (x + 12)(x + 2)$.

69. 1. Par exemple :

n	$A(n)$
0	1
1	0
2	1
3	4
4	9
5	16

2. On peut conjecturer que le résultat est toujours un carré parfait (le carré d'un nombre entier).

3. $(2n - 1)^2 - n(3n - 2) = 4n^2 - 4n + 1 - 3n^2 + 2n$

$= n^2 - 2n + 1$

$= (n - 1)^2$

qui est le carré de l'entier $n - 1$.

70. 1. Soient a et b deux nombres réels ayant le même carré.

Alors $a^2 = b^2$, d'où $a^2 = b^2 = 0$ et donc $(a + b)(a - b) = 0$.

Par la règle du produit nul, $a + b = 0$ ou $a - b = 0$, soit $a = -b$ ou $a = b$.

a et b sont donc égaux ou opposés.

2. Soient a et b deux nombres réels positifs.

• Si $a = b$, alors leurs carrés a^2 et b^2 sont égaux.

• Supposons que $a^2 = b^2$. D'après la question précédente on a : $a = b$ ou $a = -b$.

Si $a^2 = b^2 = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$ c'est-à-dire $a = b$.

Si a^2 et b^2 et sont non nuls, a et b sont non nuls. De plus comme a et b sont positifs, alors a ne peut pas être égal à $-b$. On en déduit que $a = b$.

Dans les deux cas, a et b sont égaux.

71. a) 2 pour $x \neq -2$.

b) $\dfrac{3x - 2}{5x + 10}$

c) $5x + 4$ pour $x \neq 0$.

d) $\dfrac{2x + 3}{x + 1}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$.

72. a) $\dfrac{-2x - 3}{(x + 1)x}$ **b)** $\dfrac{5x + 6}{2(x - 2)}$

c) $\dfrac{x + 16}{(x - 4)(x + 1)}$ **d)** $\dfrac{8x^2 + 5x + 6}{(2x - 1)(x + 3)}$

73. 1. `=A2/(A2+1)`

2. Conjecture : $f(x) - g(x) = 1$.

Preuve :

$$f(x) - g(x) = \frac{x}{x + 1} - \left(3 - \frac{4 + 3x}{x + 1}\right)$$

$$= \frac{x}{x + 1} + \frac{4 + 3x}{x + 1} - 3$$

$$= \frac{4 + 4x}{x + 1} - 3$$

$$= \frac{4(x + 1)}{x + 1} - 3 = 1$$

(On pouvait aussi mettre au même dénominateur.)

Résoudre des équations

74. a) $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

b) $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{3}{5} ; \dfrac{3}{2} ; 5\right\}$

c) $\mathcal{S} = \{-20 ; -3 ; 3\}$

75. a) $(x + 4)^2 = 121 \Leftrightarrow x + 4 = 11$ ou $x + 4 = -11$

$\mathcal{S} = \{-15 ; 7\}$

b) $\mathcal{S} = \{-2 ; 1\}$

c) $\mathcal{S} = \{-2 ; 6\}$

d) $\mathcal{S} = \varnothing$

76. Il s'agit de résoudre $f(x) = 0$ donc $(5x + 1)(x - 4) = 0$.

Les antécédents sont $-\dfrac{1}{5}$ et 4.

77. $A(x) = (x-1)(x^2-22x+121) = (x-1)(x-11)^2$

L'expression s'annule pour $x = 1$ ou pour $x = 11$.

78.1. $N(1) = (0{,}5 \times 1 + 1)^2 = 2{,}25$ milliers soit 2 250.

2. On résout $N(t) = 16$.

$(0{,}5 \times t + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow 0{,}5t + 1 = 4$ ou $0{,}5t + 1 = -4$

$t = 6$ ou $t = -10$.

La deuxième solution n'est pas possible car une durée n'est pas négative donc c'est au bout de 6 jours.

79. 1. La surface est donnée par la formule $2 \times x^2 + 4 \times 2x = 2x^2 + 8x$ (fond et couvercle de la boite + 4 bords extérieurs).

De plus : $2(x+2)^2 - 8 = 2(x^2+4x+4) - 8 = 2x^2 + 8x$, d'où la formule.

2. On résout $2(x+2)^2 - 8 = 72$.

$(x+2)^2 = 40$. Donc $x = \sqrt{40} - 2$ ou $x = -\sqrt{40} - 2$.

La deuxième solution n'étant pas possible car une longueur est positive, il faut prendre $x = \sqrt{40} - 2 = 2\sqrt{10} - 2$.

80. Soit a le pourcentage de hausse. Augmenter de a % revient à multiplier par $\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$.

On en déduit que $\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^2 = 1{,}20$.

On trouve $a = 100\left(\sqrt{1{,}20} - 1\right) \approx 9{,}54$.

81. 1. $f(x) = 3(x^2 - 6x + 9) + 5 = 3x^2 - 18x + 32$

2. a) $f(2) = 8$ avec la première forme.

b) $f(0) = 32$ avec la deuxième forme.

c) $f\left(3+\sqrt{5}\right) = 20$ avec la première forme.

d) $f\left(\sqrt{2}\right) = 38 - 18\sqrt{2}$ avec la deuxième forme.

82. 1. $x = 2$ ou $x = -\dfrac{3}{7}$

2. $(x-2)(3+7x) = 7x^2 - 11x - 6$

3. $f(x) = -6 \Leftrightarrow 7x^2 - 11x - 6 = -6$

$\Leftrightarrow x(7x - 11) = 0$

Les solutions sont 0 et $\dfrac{11}{7}$.

83. 1. $h(x) = x^2 + 6x - 55$

2. $(x+3)^2 - 64 = x^2 + 6x + 9 - 64 = x^2 + 6x - 55$

3. a) $h(0) = -55$ avec la forme développée.

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+11) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -11$

$h(x) = -64 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 64 = -64 \Leftrightarrow x = -3$

84.1. $(x-2)^2(x+1) = (x^2 - 4x + 4)(x+1)$

$= x^3 - 3x^2 + 4$

2. $x^3 = 3x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x+1) = 0$

Les solutions sont 2 et -1.

85. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$

$\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 1\}$

b) $f(x) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = -2$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$

$\mathcal{S} = \{-1\ ;\ 0\}$

86. 1. L'expression A n'est pas définie pour $x = -\dfrac{1}{3}$.

2. a) 1 **b)** $-\dfrac{1}{5}$ **c)** $\dfrac{7}{5}$ **d)** 19

3. Elle s'annule pour $x = -3$.

4. On résout $\dfrac{x+3}{3x+1} = 3$.

On obtient $x = 0$.

87 a) $2(3x-2) = x + 1$ et $x \neq -1$.

$\mathcal{S} = \{1\}$

b) $(x+6)(2x-2) = (x-3)(2x-1)$ et $x \neq 1$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

$\mathcal{S} = \{-3\}$

c) $3(5-x) = 2(x+2)$ et $x \neq -2$.

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{11}{5}\right\}$

d) $\dfrac{x(2x+3) - 2x(x+5)}{(x+5)(2x+3)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-7x}{(x+5)(2x+3)} = 0$

$\mathcal{S} = \{0\}$

88. a) $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{2}{5}\ ;\ 4\right\}$ **b)** $\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{10}\right\}$

c) $\mathcal{S} = \varnothing$ car -1 est une valeur interdite.

d) $\mathcal{S} = \varnothing$

89.1. $p(5) = \dfrac{360}{11} \approx 32{,}7\ \%$

2. On résout $\dfrac{72x}{x+6} = 50$.

On trouve $x = \dfrac{150}{11} \approx 13{,}64$ semaines (14 semaines si on arrondit).

90.1. Il affiche $\mathbf{\dfrac{17}{10} = 1{,}7}$.

2. Non il ne fonctionne pas si **b=0** donc si **x=-2**.

3 .

```
x=float(input("Saisir une valeur de x : "))
a=5*x+2
b=2*x+4
if b==0:
  print("valeur interdite")
else:
  c=a/b
  print(c)
```

4. Il faut saisir $\mathbf{x = -\dfrac{2}{5}}$.

91. Le schéma présente une configuration de Thalès.

Soit x la distance entre l'arbre 1 et l'arbre 2.

D'après l'énoncé, on trouve : $\dfrac{1}{1{,}1} = \dfrac{x-1}{x}$.

Ce qui donne $x = 11$.

92. Les deux droites sont parallèles si $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{5}{7}$.

On trouve $x = 7{,}5$.

93. D'après l'énoncé:

$\dfrac{BC}{AB} = \cos(60°)$

Donc $\dfrac{BC}{BC+4} = \dfrac{1}{2}$ ce qui donne BC = 4, puis AB = 8 et enfin $AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ d'après le théorème de Pythagore.

94. 1. Voir le cours p. 95 du manuel.

2.• Si $k < 0$, $\sqrt{x} = k$ n'a pas de solution car une racine carrée est positive.

• Si $k \geqslant 0$, on a : $\sqrt{x}$ et k sont positifs.

D'après la propriété de l'exercice 70,

$\sqrt{x} = k \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = k^2 \Leftrightarrow x = k^2$

95.

```
k=float(input("Saisir une valeur de k : "))
if k<0:
  print(" Pas de solution")
else:
  x=k**2
  print("La solution est ",x)
```

96. a) 10^{16}

b) $\dfrac{6\,561}{2\,401}$

c) $\dfrac{1}{9}$

d) $\dfrac{81}{16}$

e) Pas de solution

f) 16

Relation simple entre variables

97. 1. $r = \sqrt{\dfrac{\mathcal{S}}{\pi}}$

2. $r = \sqrt{\dfrac{25}{\pi}} \approx 2{,}8$ cm (28 mm)

98.1. On sait que $\mathcal{V} = L \times \ell \times h$. Donc $h = \dfrac{\mathcal{V}}{L \times \ell}$.

2. On sait que $\mathcal{A} = 2\ell L + 2\ell h + 2hL$.

On en déduit que $h(2\ell + 2L) = \mathcal{A} - 2\ell L$ puis que $h = \dfrac{\mathcal{A} - 2\ell L}{2\ell + 2L}$.

99. 1. $\Delta t = \dfrac{d}{v}$

2. $\Delta t = \dfrac{15\,000}{7} \approx 2\,142{,}86 \approx 36$ min

100. 1. $I = \dfrac{U}{R}$

2. $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{4}{0{,}16} = 25$ A

101. $y = 3 - \dfrac{1}{2}x^2$

102. Pour $x \neq -1$:

$y(x+1) = x \Leftrightarrow y = x - xy \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$

Travailler autrement

103. On peut montrer que l'aire de EFG est donnée par $\frac{EF \times HG}{2} = \frac{(6-2x)^2}{2}$ pour $x \in [0\ ;\ 3]$.

On résout alors $\frac{(6-2x)^2}{2} = 3 \Leftrightarrow (6-2x)^2 = 6$.

On trouve $x = \frac{6-\sqrt{6}}{2}$ ou $x = \frac{6+\sqrt{6}}{2}$.

La deuxième n'est pas possible car supérieure à 3.

Donc $x = \frac{6-\sqrt{6}}{2}$.

Exercices bilan p. 106

106. La meilleure forme

1. $A(x) = x^2 + 4x - 5$

2. $A(x) = (x + 2 + 3)(x + 2 - 3) = (x + 5)(x - 1)$

3. a) $A(3) = (3 + 2)^2 - 9 = 16$

b) Avec la forme factorisée de $A(x)$:

$(x + 5)(x - 1) = 0$

$\mathcal{S} = \{-5\ ;\ 1\}$

c) Avec la forme développée :
$x^2 + 4x - 5 = -5 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0$

Les antécédents sont 0 et –4.

107. Trois expressions

1. $A(x) = (2x - 10)(2x + 10)$

2. $B(x) = (5 + x)(2 - 5x)$

3. $C(x) = x^2 - 6x + 9$

4. $A(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 10)(2x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$

$A(x) = 69 \Leftrightarrow 4x^2 - 100 = 69$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{169}{4} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$ ou $x = -\frac{13}{2}$

5. $x = -5$ ou $x = \frac{2}{5}$.

6. Il s'agit de résoudre $4x^2 - 100 = 4(x - 3)^2$

$4x^2 - 100 = 4x^2 - 24x + 36$

$\Leftrightarrow 24x = 136 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3}$

108. Étude de deux quotients

1. $\frac{x}{x-1} + 2 = \frac{x + 2(x-1)}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$

2. $x = \frac{2}{3}$

3. a) $A(11) = \frac{141}{10}$, $B(11) = \frac{31}{10}$ et $A(11) - B(11) = 11$.

b) $A(x) - B(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1} - \frac{3x-2}{x-1}$

$= \frac{x^2 + 2x - 2 - 3x + 2}{x-1}$

$= \frac{x^2 - x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$

109. Pour poser un grillage

1. L'aire de l'enclos de longueur L et de largeur ℓ est donnée par $\ell \times L = x(12 - x) = 12x - x^2$.

On résout alors : $12x - x^2 = 27 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 0$.

2. $-x^2 + 12x - 27$

3. Il s'agit alors de résoudre $(x - 3)(9 - x) = 0$.

$x = 3$ ou $x = 9$.

On peut déduire des deux configurations possibles que : $\ell = 3$ et $L = 9$.

4. On résout : $-x^2 + 12x = 30$.

D'après l'affichage (deuxième ligne) :

$36 - (x - 6)^2 = 30 \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 6$

$x = 6 + \sqrt{6}$ ou $x = 6 - \sqrt{6}$.

On peut déduire des deux configurations possibles que : $\ell = 6 - \sqrt{6}$ et $L = 6 + \sqrt{6}$.

110. Paniers bio

1. $C(15) = 205$ (en euros)

2. $\frac{205}{15} \approx 13{,}67$ euros

3. $C_m(x) = \frac{100 + 7x}{x}$

4. On résout $\frac{100 + 7x}{x} = 11$.

On obtient $x = 25$.

111. Des équations à résoudre

a) $\mathcal{S} = \{25\}$ **b)** $\mathcal{S} = \left\{\frac{17}{2}\right\}$

c) $\mathcal{S} = \varnothing$

d) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

e) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{25}{9}\right\}$

f) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{9}\right\}$

g) $\mathcal{S} = \{-10 ; 0 ; 10\}$

h) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{3} ; 1\right\}$

i) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{6}{11}\right\}$

j) $\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{1}{2}\right\}$

Exercices d'approfondissement p. 107

112. Un développement

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

113. Solutions d'une équation produit

```
Lire a
Lire b
Lire c
Lire d
r←(-b)/a
Afficher r
Si c≠0
   s←(-d)/c
   Afficher s
Fin si
```

114. Probabilités de tirage

1. On résout $\frac{n}{n+5} = 0{,}8$ et on trouve 20 boules jaunes.

2. On résout $\frac{n}{3n+5} = \frac{5}{16}$ et on trouve 25 boules jaunes.

115. Vrai ou faux?

a) Faux, par exemple pour $x = 0$.

b) Vrai, par exemple pour $x = 0$.

c) Vrai car lorsque l'on développe les deux membres, on trouve $x^2 + 8x + 9$.

d) Faux car sinon on aurait $x^2 = -1$.

e) Faux car en résolvant l'équation on trouve $x = -1$ qui est valeur interdite.

f) Vrai en mettant au même dénominateur.

116 Pour calculer

1. a) 4 **b)** 4 **c)** 4

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$,
on a $n^2 - (n-1)^2 - (n-2)^2 + (n-3)^2 = 4$.

3. $n^2 - (n-1)^2 - (n-2)^2 + (n-3)^2$
$= n^2 - (n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 4n + 4) + n^2 - 6n + 9$
$= 4$

4. Elle affiche 0.

5. Le résultat affiché par la calculatrice est faux. Les nombres manipulés sont trop grands pour la mémoire de la calculatrice qui utilise alors des valeurs approchées.

117. Équation bicarrée

1. $y^2 + y - 6$

2. $y^2 + y = 6$ car $x^4 = (x^2)^2$.

3. D'après **1.** $y^2 + y = 6 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0$
$\Leftrightarrow (y-2)(y+3) = 0$

Les valeurs possibles de y sont 2 et -3.

4. $y = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

$y = -3 \Leftrightarrow x^2 = -3$: pas de solution réelle.

Les solutions sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

118. Factorisations

1. R $= (4x-3)(4x-3) + 7(4x-3) = (4x-3)(4x+4)$

2. S $= 3(x+2) + (x+2)^2 = (x+2)(x+5)$

3. M $= (2x+3)(6+5x)$

A $= (7-5x)(6-5x)$

T $= (x+1)(6x+3)$

H $= (x+3)(-x+6)$

S $= (4x-1)(17x-14)$

119. Voyage en train

1. En considérant v_1 la vitesse à l'aller et v_2 la vitesse au retour et v la vitesse moyenne sur l'aller-retour, on peut montrer que $v = \frac{160}{\frac{80}{v_1} + \frac{80}{v_2}}$.

Alors $v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$.

On résout alors $100 = \frac{160v_2}{80 + v_2}$, ce qui donne $v_2 = \frac{400}{3} \approx 133{,}33$ km/h.

2. On résout $180 = \dfrac{160v_2}{80 + v_2}$, il n'y a pas de solution.

3. Non d'après la formule trouvée en **1.**

Vers la 1re

120. 1. a) $x^2 + 4x + 12 = (x + 2)^2 - 16$

b) $(x + 2)^2 - 16 = (x - 2)(x + 6)$

c) 2 et – 6

2. Pour $x^2 - 12x + 20 = 0$, on a $(x - 6)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ ou $x = 2$.

Pour $x^2 - 2x + 8 = 0$, on a $(x - 1)^2 + 7 = 0$: pas de solution réelle.

121. 1. A(3) = 0

2. Les racines du polynôme sont 3, 4 et 5.

Travaux pratiques p. 108-109

TP1. Création d'un exerciseur sur les identités remarquables

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Comprendre le fonctionnement d'un programme autour des identités remarquables et utilisant certaines connaissances de la programmation, notamment sur les chaînes de caractères. Poursuivre la construction d'un programme testant la connaissance sur les identités remarquables.

1. a) • `A` et `B` sont des nombres entiers.

• `a, b, expression_facto` et `expression_develo` sont des chaînes de caractères.

b) À la ligne 7.

c) À la ligne 6.

d) • `a` est la chaîne de caractères `2x`.

• `b` est la chaîne de caractères `3`

• `expression_facto` est la chaîne de caractères `(2x+3)^2`

• `expression_develo` est la chaîne de caractères `4x^2+12x+9`.

3. b) Changer le + en - dans les parenthèses.

TP 2. Une autre identité remarquable

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Conjecturer le développement de $(x + 1)^3$ puis développer $(a + b)^3$.

1. On observe un écart de 1 entre les différentes valeurs.

2. On peut conjecturer que $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

3. $(x + 1)^3 = (x + 1)(x^2 + 2x + 1)$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

4. $(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

TP 3. À la même distance

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Chercher la solution d'un problème en utilisant un logiciel de géométrie dynamique puis résoudre le problème de façon algébrique.

A ▶ Avec un logiciel de géométrie dynamique

Il faut prendre M(37,5 ; 0) ou M(0 ; 0).

B ▶ Avec une résolution algébrique

1. $MD = \sqrt{400 + x^2}$ et $MF = (20 + 0{,}6x)$.

L'équation à résoudre est $\sqrt{400 + x^2} = (20 + 0{,}6x)$.

2. $400 + x^2 = (20 + 0{,}6x)^2$

$\Leftrightarrow 400 + x^2 = 400 + 24x + 0{,}36x^2$

$\Leftrightarrow 0{,}64x^2 - 24x = 0$

$\Leftrightarrow x(0{,}64x - 24) = 0$

Les solutions sont 0 et $\dfrac{24}{0{,}64} = 37{,}5$ (on retrouve le résultat observé).

TP 4. Pour fabriquer des vases

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Utiliser un logiciel de calcul formel pour factoriser. L'utiliser pour chercher la solution à un problème.

A ▶ Avec un logiciel de calcul formel

1. Il affiche $(x + 1)(2x + 3)$.

2. a) $(x - 5)(3x + 1)$

b) $(x - 10)(x - 5)$

c) $\left(x + \dfrac{-\sqrt{5} - 1}{2}\right)\left(x + \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

B ▶ Application

1. $R(x) = 50x$

2. Pour 50 vases, le coût est 2 500 euros, la recette est 2 500 euros, le bénéfice est 0 euro.

3. $B(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 60x - 500$

4. On résout $-x^2 + 60x - 500 = 364$
$\Leftrightarrow -x^2 + 60x - 864 = 0$.

On factorise avec **Xcas** et on trouve :
$-(x - 36)(x - 24) = 0$.

Les solutions sont 36 ou 24 vases par jour.

En autonomie p. 100-111

Développer avec ou sans identité remarquable

122. c **123.** a

124. b **125.** b

126.1. $f(t) = 9t^2 + 12t - 5$

2. $(3t - 1)(3t + 5) = 9t^2 + 12t - 5$ d'où l'égalité.

127.

$$2(x - 7)^2 - 3 = 2(x^2 - 14x + 49) - 3 = 2x^2 - 28x + 98 - 3 = 2x^2 - 28x + 95$$

128. $(s - 2t)^2 = s^2 - 2 \times s \times 2t + (2t)^2 = s^2 - 4st + 4t^2$

129. $A = \frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{6}x + \frac{4}{3}$

$B = 64x^2 - 2x + \frac{1}{64}$

130. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 72x + 36$

$g(x) = 4x^3 - 28x^2 + 60x - 36$

131. $(4 - 3x)^2 + 8 = 9x^2 - 24x + 24$

Factoriser avec ou sans identité remarquable

132. a **133.** d

134. a **135.** a

136. a) $a(6a^2 - 7a + 3)$ **b)** $(5x - 2)^2$

137. $f(x) = (x + 2)(x + 8)$; $g(x) = 3x(x + 11)$

138. $A = \frac{1}{4}x(x - 3)$

139.

$A = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$ et $B = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

140. a) $xy(4 + 6xy + 7y^2)$

b) $(x + 1)(x + 5)$

141. 1. $f(x) = -7x^2 + 40x + 12$

2. $f(x) = (7x + 2)(-x + 6)$

Calculer avec des expressions fractionnaires

142. b **143.** c

144. $\frac{17x + 5}{3x + 1}$

145. $\frac{x + 8}{2x + 8}$

146. $\frac{3x + 1}{x + 1} - \frac{4x}{2x + 2} = 1$

147. $\frac{4x + 9}{(x + 1)(x + 2)}$

Résoudre algébriquement des équations

148. c **149.** d

150. a **151.** c

152. L'expression s'annule pour 4 et $\frac{7}{5}$.

153. $\mathcal{S} = \{4\}$

154. $\mathcal{S} = \{-1 ; 4 ; 38\}$

155. 1. $\mathcal{S} = \{-3 ; 3\}$ **2.** $\mathcal{S} = \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$

156. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{15}{2} ; \frac{7}{2}\right\}$

157. a) $\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{1}{2}\right\}$. **b)** $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

158. [AB] mesure 2.

CHAPITRE 5 Repérage et problèmes de géométrie

Manuel p. 114-133

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Il s'agit du premier chapitre du domaine Géométrie constitué de deux parties indépendantes.

Géométrie non repérée : elle reprend toutes les notions du collège à savoir, les propriétés des figures géométriques, les transformations du plan, les calculs de longueurs, d'aires, de volumes, les théorèmes de Pythagore et de Thalès, ainsi que leurs réciproques et la trigonométrie dans le triangle rectangle. La seule nouveauté est l'introduction du projeté orthogonal pour parler de plus courte distance.

Géométrie repérée : cette partie utilise les notions de repérage dans le plan vues au collège pour faire des calculs à l'aide des coordonnées de points pour trouver les coordonnées du milieu d'un segment ou une distance entre deux points.

Capacités

- → **Utiliser le projeté orthogonal**
- → **Calculer des longueurs, des aires ou des volumes**
- → **Utiliser les coordonnées pour calculer des longueurs**
- → **Calculer les coordonnées du milieu d'un segment**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 115

1. En trigonométrie

1. $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{2}$ donc $\widehat{ABC} = 30°$.

2. $\sin\widehat{ADC} = \dfrac{AD}{CD}$ soit $\sin(60°) = \dfrac{3}{CD}$ donc

$$CD = \frac{3}{\sin(60°)} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}.$$

2. Aires

1. 24 cm^2

2. Les demi-disques jaunes $\frac{1}{2}\pi \times 2^2 = 2\pi$ et les demi-disques gris $\frac{1}{2}\pi 4^2 = 8\pi$.

2. Aire totale : $24 + 10\pi$

3. Volumes

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \times AB^2 \times AE = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 4 = \frac{64}{3}$$

4. Coordonnées

A(2 ; 1) B(− 2 ; 3) C(0 ; 4) D(− 3 ; 0) E(3 ; − 1) et F(− 1 ; − 2)

5. Triangles semblables

Les côtés sont deux à deux parallèles et ils ont un angle égal.

Activités p. 116-117

Activité 1. Régionner le plan

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Revoir la signification de la médiatrice et la notion de distance avec des droites et des cercles.

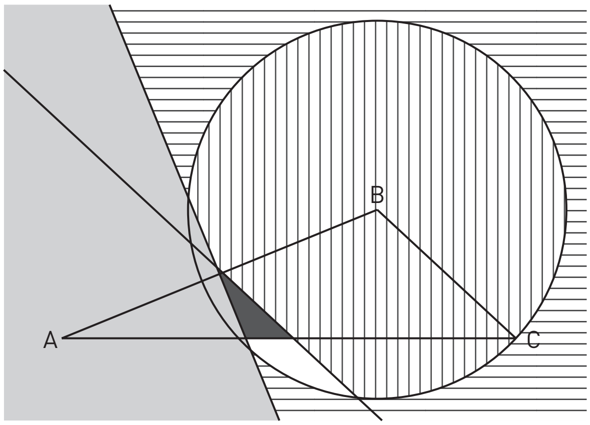
2. On trace la médiatrice du segment [AB] et on hachure la partie qui contient le point A (partie en gris clair).

3. On trace le cercle de centre B et de rayon BC et on hachure l'extérieur (partie avec des hachures horizontales).

4. On trace la droite parallèle à la droite (BC) à une distance de 4 de celle-ci et on hachure la partie proche de (BC) (partie avec des hachures verticales).

5. On hachure la partie intérieure au triangle (partie en gris foncé).

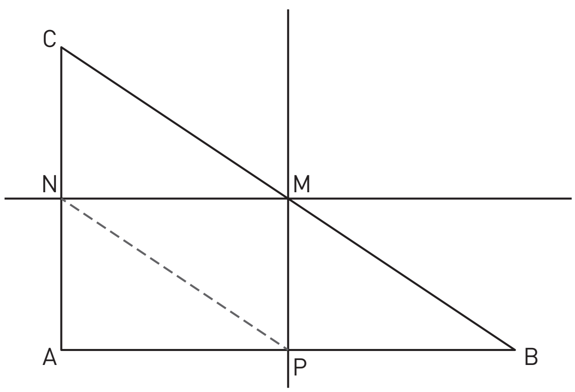
Il reste en blanc la zone possible.



Activité 2. Plus court

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Il s'agit de rechercher une distance minimale.

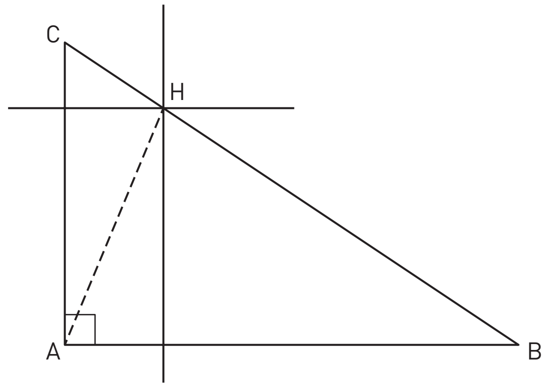
1.



2. On conjecture que le point M doit correspondre au projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

3. Le quadrilatère ANMP étant un rectangle ses diagonales sont de même longueur donc NP = AM.

4.



Dans le triangle AHM, AH est un côté et AM est l'hypoténuse donc AH < AM.

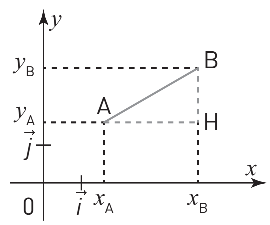
Activité 3. Distance entre deux points

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Il s'agit de trouver la distance entre deux points.

1. Dans l'ordre des cas :

	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4	Cas n° 5
A	(2 ; 3)	(2 ; –1)	(–3 ; 0)	(2 ; 3)	(–4 ; 1)
B	(4 ; 3)	(2 ; –3)	(0 ; 3)	(4 ; 1)	(2 ; –3)
AB	2	2	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{52}$

2.



On conjecture que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

3. $AH = x_B - x_A$ et $BH = y_B - y_A$, ou le contraire selon la figure, puis le théorème de Pythagore donne $AB = AH^2 + BH^2$.

D'où $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Activité 4. Où est le milieu ?

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Il s'agit de trouver les coordonnées du milieu d'un segment.

1.

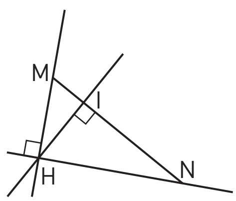
	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
A	(2 ; 0)	(– 2 ; 1)	(– 6 ; – 4)	(1,5 ; 4)
B	(4 ; 6)	(2 ; – 3)	(10 ; – 3)	(2 ; 3)
K	(3 ; 3)	(0 ; – 1)	(2 ; – 3,5)	(1,75 ; 3,5)

2. $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

3. $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

À vous de jouer ! p. 120-121

1. 1. et **2.**

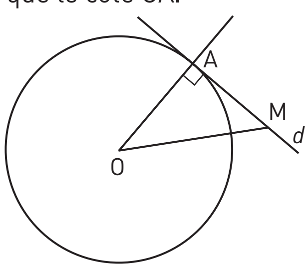


3. La hauteur issue de N est la droite (NH).

4. La distance est (HI).

2. (AA′) et (BB′) sont parallèles car perpendiculaires à la même droite *d* donc ABB′A′ est un trapèze rectangle.

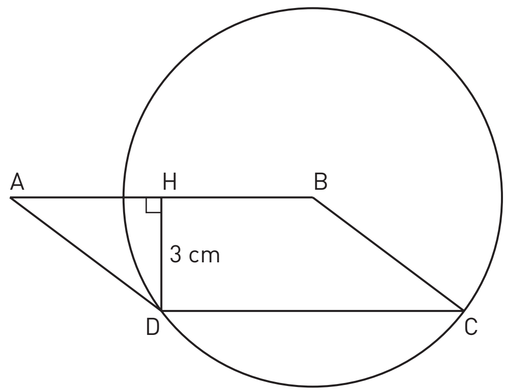
3. Dans le triangle OAM, OM est l'hypoténuse donc plus longue que le côté OA.



4. 1. La distance DH est $\dfrac{24}{8} = 3$.

3. La droite (DH) est alors la médiatrice du segment [AB] et donc DA = DB.

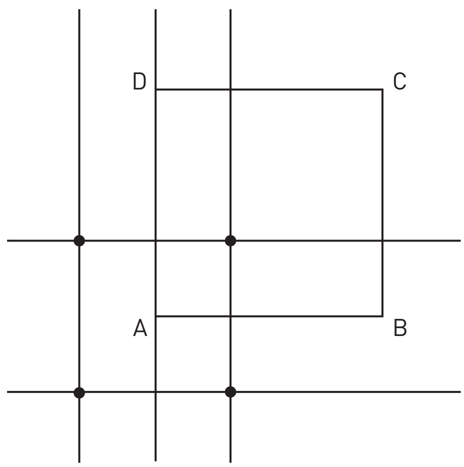
4. On en déduit que DA = DB = BC et donc BC est aussi un rayon de ce cercle.



5. 1. On obtient deux droites parallèles à (AB).

2. Les distances possibles pour le point B sont 4 ou 8.

3. et **4.** Il y a 4 points qui sont dans les deux ensembles.



6. Le volume du tétraèdre est :

$$\frac{1}{3} \times \frac{AB \times AD}{2} \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 4}{2} \times 4 = \frac{32}{3}$$

Le volume du cube est 64. Le rapport est de $\dfrac{1}{6}$.

7. Le triangle ACG est rectangle en C donc $AG^2 = AC^2 + CG^2 = 18 + 9 = 27$ d'où $AG = 3\sqrt{3}$.

8. $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

9. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;2\right)$, le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(-3\,;\frac{5}{2}\right)$ et le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$.

Exercices d'application p. 122-123

Apprendre à apprendre

10. La formule donnant le milieu d'un segment [AB] est la formule **c).**

Celle donnant la distance AB est la formule **e).**

11. Vrai : ①③

Faux : ②④⑤⑥⑦

Questions – Flash

12. a) Le projeté du point A sur (BD) est le point D.

b) Le projeté du point E sur (BC) est le point G.

c) Le projeté du point F sur (AB) est le point B.

13. D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64$

Donc AC = 8.

14. D'après le théorème de Thalès : $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$ ce qui donne : $\frac{5}{AE} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow AE = \frac{5\times 12}{8} = \frac{15}{2}$.

15.

$$AB = \sqrt{(-4-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

16. Le milieu de [AB] est le point de coordonnées $\left(\frac{-3+(-2)}{2}\,;\frac{1+(-4)}{2}\right)$, soit : $\left(-\frac{5}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$.

17. $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$

18. $\sin\widehat{BCA} = \frac{4}{5}$ d'où $\widehat{BCA} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = 53{,}13°$.

Géométrie plane

19. ABCD est un parallélogramme donc (AB) et (CD) sont parallèles et AB = CD.

ABEF est un parallélogramme donc (AB) et (EF) sont parallèles et AB = EF.

Donc (CD) et (EF) sont parallèles et CD = EF d'où CDFE est un parallélogramme.

20. D'après le théorème de Pythagore :

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 25^2 - 15^2 = 400$ donc AB = 20.

21. On calcule $BC^2 = 25^2 = 625$ et $BD^2 + CD^2 = 24^2 + 7^2 = 625$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, BCD est rectangle en D.

22. D'après le théorème de Thalès :

$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD}$ d'où $\frac{8}{12} = \frac{AE}{9}$ et donc :

$AE = 9 \times \frac{8}{12} = 6$.

23. On calcule $\frac{AB}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AF}{AE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Les quotients sont égaux et donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

24. 1. $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 28^2$ donc $BC = 2\sqrt{7}$.

2. $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 64$ donc BD = 8.

25. 1. On a $\frac{MC}{MD} = \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD}$,

d'où $\frac{MC}{MD} = \frac{MB}{3{,}5} = \frac{2}{3}$ donc $MB = \frac{7}{3}$.

2. De plus $\frac{1{,}8}{MD} = \frac{2}{3}$ donc MD = 2,7.

3. I et J sont milieux donc $\frac{MI}{MB} = \frac{MJ}{MC} = \frac{1}{2}$.

Calculer des longueurs, des aires et des volumes

26. 1. $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144$

$= 225 = 15^2 = AC^2$

Donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. Aire de ABC $= \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{9 \times 12}{2} = 54$

27. Le volume de la pyramide est : $\dfrac{1}{3} \times 6 \times 3 \times 6 = 36$.

Le volume du cylindre est : $\pi \times 2^2 \times 3 = 12\pi \approx 37{,}7$.

Le volume du cône est $\dfrac{1}{3}\pi 3^2 \times 3 = 9\pi \approx 28{,}3$ et le volume de la boule est : $\dfrac{4}{3}\pi \times 2^3 = \dfrac{32}{3}\pi \approx 33{,}5$ qui donne dans l'ordre croissant le cône ③, la boule ④, la pyramide ① et le cylindre ②.

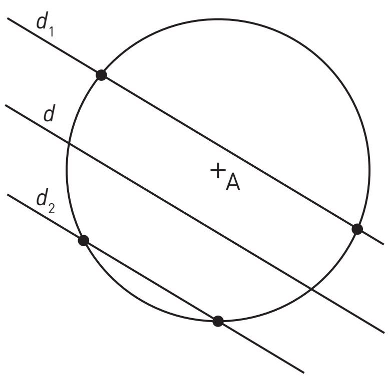
Utiliser le projeté orthogonal

28. 1. ABC et AHC sont semblables car ils ont deux angles égaux et une longueur identique.

2. ABC et AHB sont semblables car ils ont deux angles égaux et une longueur identique.

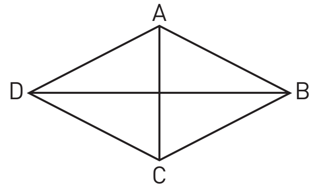
29. Les triangles ABH et AB′H′ ont deux angles égaux donc ils sont semblables. De plus, ils ont un côté de même longueur donc ils sont égaux.

30. 1. 2. 3.



4. Si la distance du point A à la droite d est inférieure à 2 alors il y a 4 solutions, si la distance vaut 2 alors il y a 3 solutions, si la distance est entre 2 et 6 alors il y a 2 solutions, si la distance vaut 6 alors il y a 1 seule solution et si la distance est supérieure à 6 alors il n'y a pas de solution.

31. 1. et **2.** Comme ABCD est un parallélogramme alors [BD] et [AC] ont le même milieu qui est donc le projeté orthogonal des points B et D, par conséquent (BD) et (AC) sont perpendiculaires.



3. ABCD est donc un losange.

Utiliser des coordonnées dans un repère

32. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

33. $CD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

34. 1. $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$AC = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$ et $BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

2. ABC est isocèle en B.

35. 1. $AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ et $BC = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$.

2. $\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ donc BC = BA + AC et les points sont alignés.

36. 1. Le milieu de [AC] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{5}{2}\right)$.

2. Le milieu de [BD] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{5}{2}\right)$.

3. ABCD est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu.

Calculs et automatismes

37. a) 4 **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt{5}$ **d)** $4\sqrt{2}$

38. a) $\dfrac{7}{2}$ **b)** 4 **c)** -4 **d)** $\dfrac{3}{2}$

Exercices d'entraînement p. 124-126

Utiliser le projeté orthogonal

39. 1. Les triangles BCH et BCK ont deux angles égaux et un côté de même longueur donc ils sont égaux.

2. Par conséquent CH = BK et donc AH = AK. D'où $\frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AB}$ et d'après la réciproque du théorème de Thalès (HK) et (BC) sont parallèles.

40. 1. $AC^2 = 17{,}5^2 = 306{,}25$ et

$AB^2 + BC^2 = 10{,}5^2 + 14^2 = 306{,}25$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle est rectangle en B.

2. Aire $= \frac{AB \times BC}{2} = \frac{AC \times BH}{2}$

3. D'où $BH = \frac{AB \times BC}{AC} = 8{,}4$.

41. 1. Aire $= \frac{AB \times BC}{2} = 9$

2. D'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 45$ d'où $AC = 3\sqrt{5}$.

3. Aire $= \frac{AB \times BC}{2} = \frac{AC \times BH}{2}$ d'où :

$$BH = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{18}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

42. 1. et **2.** Dans le triangle ABO, (AK) et (OH) sont des hauteurs qui se coupent en C donc (BC) est la troisième hauteur et donc (BC) et (AO) sont perpendiculaires.

43. 1. Les droites (DK) et (BH) sont parallèles car perpendiculaires à deux droites parallèles (AB) et (CD). De plus les longueurs BH et DK sont égales car par symétrie elles sont le double de la largeur du parallélogramme. Et donc DHBK est un parallélogramme.

2. Alors ses diagonales ont même milieu et comme ABCD aussi est un parallélogramme alors [BD] et [HK] ont le même milieu ce qui prouve que AKCH est un parallélogramme.

44. Les triangles ADE et BCH sont rectangles et isocèles avec les mêmes longueurs et de plus leurs côtés sont deux à deux parallèles, par conséquent [AE] et [CH] sont parallèles et de même longueur donc AECH est un parallélogramme.

45. a) MAP et NAQ ont deux longueurs égales et un angle identique donc ils sont égaux par conséquent MP = NQ

b) La rotation de centre A et d'angle $\widehat{MAP}$ envoie M en P et N en Q et comme elle conserve les longueurs alors MP = NQ.

46. 1. $\frac{ED}{HG} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, $\frac{DB}{GB} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ et $\frac{BE}{BH} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ donc tous ces rapports sont égaux à $\sqrt{2}$.

2. Leurs côtés sont homothétiques donc les triangles sont semblables.

3. Par conséquent on a les égalités d'angles :

$\widehat{DBE} = \widehat{GBH}$, $\widehat{BED} = \widehat{BHG}$ et $\widehat{EDB} = \widehat{HGB}$.

Alors :

$\widehat{BDC} + \widehat{BGC} = \widehat{DBE} + \widehat{GBE} = \widehat{GBH} + \widehat{GBE} = \widehat{HBA} = \widehat{BHC}$.

Calculer des longueurs, des aires, des volumes

47. 1. Aire du carré = 16

2. Rayon du disque $OA = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$

3. Aire du disque $= \pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$

4. Aire turquoise $= 8\pi - 16 \approx 9{,}13$

48. 1. Le rayon de la sphère est $OA = 2\sqrt{3}$ donc son volume est $\frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = 32\pi\sqrt{3}$.

2. Le rayon de la sphère est 1 donc son volume est :

$$\frac{4}{3}\pi \times (1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

49. Le volume d'eau dans la sphère est de $\frac{4}{3}\pi \times (2)^3 = \frac{32}{3}\pi\sqrt{3}$. Le cylindre aura une hauteur h d'eau telle que son volume en eau soit égal à $\pi \times 2^2 \times h$ et donc on résout $\pi \times 2^2 \times h = \frac{32}{3}\pi\sqrt{3}$ ce qui donne $h = \frac{8}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$ donc cela déborde !

50. 1. Le diamètre d'une balle de tennis est de $\frac{26}{4} = 6{,}5$ cm.

2. Le rayon est donc 3,25 cm.

3. Le volume de la boite est $\pi \times 3{,}25^2 \times 26$.

3. Le volume d'une balle est $\frac{4}{3}\pi \times 3{,}25^3$.

4. Le volume de l'espace vide est de :

$$\pi \times 3{,}25^2 \times 26 - 4 \times \frac{4}{3}\pi \times 3{,}25^3 \approx 287{,}59$$

Utiliser la trigonométrie

51. 1. $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{8} = 0{,}5$ d'où $\widehat{ABC} = 30°$.

2. Donc $\widehat{CAB} = 90° - 30° = 60°$.

3. $\cos\widehat{ABC} = \frac{BC}{AB}$ d'où $BC = 8 \times \cos 60° = 4\sqrt{3}$.

52. 1. Dans le triangle ADO on a $\sin\widehat{ADO} = \frac{AO}{AD} = \frac{3}{5}$ donc $\widehat{ADO} \approx 36{,}9°$.

2. $BO = DO = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

3. $\widehat{BAD} = 2 \times \widehat{OAD} = 2(90° - 36{,}9°)$ soit environ 106,2°.

53. 1. Dans le triangle ADC, on a $\cos(60°) = \frac{AD}{CD}$ donc $CD = \frac{3}{\cos(60°)} = 6$.

2. Donc $AC = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

3. $\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{5}$ d'où $\widehat{ABC} \approx 46{,}1°$.

Utiliser les coordonnées

54. 1. $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $BC = 5$.

2. $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en A.

55. 1. $AB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$AC = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$ et $BC = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$,

donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$ et le triangle ABC est rectangle en A.

2. $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{85}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}$ et donc $\widehat{ABC} \approx 63{,}43°$.

56. 1. $M\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{7}{2}\right)$

2. $MA = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$ puis

$MB = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$ et

$MC = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$.

3. Donc MA = MB = MC et par conséquent le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

57. a) $AB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

$BC = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$ donc le triangle ABC est quelconque.

b) $AB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

$AC = \sqrt{7{,}5^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{76{,}5}$

$BC = \sqrt{0{,}5^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{12{,}5}$ donc le triangle ABC est quelconque.

c) $AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$AC = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$ donc le triangle ABC est isocèle en C.

58. Le milieu de [AD] est $\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et le milieu de [BC] est le même donc ABDC est un parallélogramme.

59. 1. $AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$AC = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ par conséquent $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et le triangle ABC est rectangle en B.

2. Le milieu de [AC] est (3 ; 4,5) et le milieu de [BD] également donc ABCD est un parallélogramme qui a un angle droit donc c'est un rectangle.

60. Le milieu de [AD] est (0 ; 5) et le milieu de [BC] également donc BACD est un parallélogramme mais de plus on a $AB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ et

BD = $\sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$ donc il a deux côtés consécutifs égaux donc c'est un losange.

61. C est le symétrique de A par rapport à B donc B est le milieu du segment [AC] ce qui donne $x_B = \frac{x_A + x_C}{2}$ soit $-3 = \frac{2+x_C}{2}$ et donc $x_C = -8$. De même $y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$ soit $-1 = \frac{-3+y_C}{2}$ et donc $y_C = 1$.
Donc C a pour coordonnées (– 8 ; 1).

62. ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$

donc $\begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4+x_D}{2} \\ \frac{7}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6+y_D}{2} \end{cases}$

Donc D a pour coordonnées (– 1 ; 1).

63. 1. ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu $\left(4;\frac{9}{2}\right)$

donc $\begin{cases} 4 = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+x_C}{2} \\ \frac{9}{2} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+y_C}{2} \end{cases}$ qui donne C(10 ; 4).

2. AC = $\sqrt{12^2+1^2} = \sqrt{145}$ et BD = $\sqrt{8^2+9^2} = \sqrt{145}$.
Les diagonales sont de même longueur donc ABCD est un rectangle.

64. La distance de A à l'axe des abscisses est 2 et la distance de A à l'axe des ordonnées est de 3.

65. 1. AB = $\sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80}$
AC = $\sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$ et BC = $\sqrt{1^2+8^2} = \sqrt{65}$ donc le triangle ABC est isocèle en C.

2. OA = 5 et OB = $\sqrt{3^2+4^2} = 5$

3. De OA = OB, on en déduit que O appartient à la médiatrice du segment [AB] et comme CA = CB alors C aussi et la droite (OC) est cette médiatrice.

4. Le triangle OAB est donc isocèle en O.

66. 1. AB = $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
AC = $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ et BC = 4.

2. Donc le triangle ABC est isocèle en A.

3. I(1 ;– 1)

4. I est milieu de [AD] d'où $\begin{cases} 1 = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{1+x_D}{2} \\ -1 = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{2+y_D}{2} \end{cases}$

et donc D(1 ; – 4).

5. ABDC est un parallélogramme car ses diagonales ont même milieu I et deux côtés consécutifs égaux, AB et AC, donc c'est un losange.

67. 1. AB = $\sqrt{9^2+12^2} = 15$
AC = $\sqrt{16^2+12^2} = 20$ et BC = 25 donc ABC est rectangle en A.

2. $I\left(\frac{7}{2};0\right)$

3. D est le symétrique de A par rapport à I donc I est milieu de [AD] d'où $\begin{cases} \frac{7}{2} = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{0+x_D}{2} \\ 0 = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{12+y_D}{2} \end{cases}$ et

donc D(7 ; – 12).

68. 1. DE = $\sqrt{289} = 17$,
DF = $\sqrt{13^2+(2\sqrt{13})^2} = \sqrt{221}$ et
EF = $\sqrt{4^2+(2\sqrt{13})^2} = \sqrt{68}$ donc le triangle DEF est rectangle en F.

2. $\cos\widehat{EDF} = \frac{DF}{DE} = \frac{\sqrt{221}}{17}$ d'où $\widehat{EDF} \approx 29°$.

69. Cet algorithme calcule les coordonnées du milieu d'un segment.

70. Ce programme calcule la distance entre deux points.

71. 1. $\sin\widehat{BEC} = \frac{BC}{BE} = \frac{5}{7}$ et $\widehat{BEC} \approx 45{,}6°$.

2. AED = BEC car opposés par le sommet.

3. $\cos\widehat{AED} = \frac{AE}{DE} = \frac{4}{DE}$ et donc $DE = \frac{4}{\cos 45{,}6°} \approx 5{,}7$.

72. 1. On a : AB = 4 = BC = CD = AD donc ABCD est un carré.

2. E(– 3 ; 1), F(– 1 ; 3), G(– 1 ; – 1) et H(1 ; 1)

3. EF = $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$

4. On sait que EK = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ et EH = 4 donc le rayon du cercle cherché est : $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$.

Travailler autrement

73. À partir du point A si on se déplace sur une arête de 10, il reste à faire encore 5 sur une arête suivante pour obtenir un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{10^2+5^2}=15$.

Donc il y a 6 points solutions qui sont les milieux des arêtes [BC], [BF], [DC], [DH], [EF] et [EH].

74. Le triangle cherché a deux sommets A et B qui sont sur les droites *d* et *d′*. On relie les points A et B puis on trace la droite perpendiculaire au segment [AB] passant par le point d'intersection des deux droites. Ensuite on trace les perpendiculaires à *d* et *d′* passant par les points A et B.

75. Le périmètre est minimal si Q et R sont les projetés orthogonaux de A et B sur les côtés opposés du triangle. Pour cela on construit les symétriques du point P par rapport aux côtés du triangle et on regarde les longueurs égales et pour minimiser la longueur les points doivent être alignés.

76. On trace le symétrique A′ du point A par rapport à la rivière. La distance AM + MB est égale à la distance A′M + MB car AM = A′M.

Alors la distance A′M + MB est minimale si les points A′, B et M sont alignés.

Exercices bilan p. 127

77. Longueur constante

1. Les triangles MEB et MFC sont rectangles en M car (AI) est la médiatrice de [BC]. De plus MEB et MFC sont semblables avec le triangle ABC car ils ont les mêmes angles, par conséquent MEB et MFC sont isocèles en M.

2. On a : ME = MB et MF = MC.

Donc ME + MF = MB + MC = BC qui est donc constant.

78. Encore une constante

1. $\widehat{ECA}=\widehat{BCF}=45°$ donc l'angle ECF est droit.

2. ECFG a trois angles droits donc c'est un rectangle.

3. Ses diagonales se coupent en leur milieu donc M est aussi milieu de [CG].

4. D'après le théorème de Thalès ils sont alignés sur une parallèle à (AB).

5. Donc la distance MH est la distance entre cette parallèle et (AB).

6. On calcule l'aire du trapèze EFQP de deux façons :

$$\frac{(EP+FQ)\times PQ}{2}$$

ou en découpant en deux trapèzes :

$$\frac{(EP+MH)\times PH}{2}+\frac{(FQ+MH)\times HQ}{2}$$

À l'aide du théorème de Thalès, on montre que H est le milieu de [PQ] ce qui donne l'égalité cherchée.

79. Cercle et triangle

1. AC = $\sqrt{3^2+4^2}=5$ donc A appartient au cercle de centre C et de rayon 5.

2. BO = $\sqrt{13^2+1^2}=\sqrt{170}$ et BJ = $\sqrt{13^2+0^2}=13\neq$ BO donc B n'appartient pas à la médiatrice de [OJ].

3. JA = $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$

JD = $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ et AD = $\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$ donc le triangle JAD est isocèle en D.

80. Triangle et rectangle

1. AB = $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

AC = $\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$ et BC = $\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$.

2. Donc le triangle ABC est rectangle en B.

3. $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

4. D est le symétrique de B par rapport à M donc M est le milieu de [BD] soit $\begin{cases}\dfrac{3}{2}=\dfrac{x_B+x_D}{2}=\dfrac{-1+x_D}{2}\\[2mm]\dfrac{3}{2}=\dfrac{y_B+y_D}{2}=\dfrac{4+y_D}{2}\end{cases}$

Donc D a pour coordonnées (4 ; – 1).

81. Aires de triangles

1. $AB = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$

$AC = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65}$ et $BC = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}$ donc le triangle ABC est rectangle en B.

2. Les diagonales ont le même milieu et il y a un angle droit donc ABCD est un rectangle.

3. Aire de ABC $= \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{\sqrt{20}\times\sqrt{45}}{2} = 15$

4. Aire de ABC $= \dfrac{AC \times BH}{2}$ d'où :

$BH = 15 \times \dfrac{2}{\sqrt{65}} = \dfrac{30}{\sqrt{65}}$.

5. $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{45 - \dfrac{900}{65}} = \sqrt{\dfrac{2025}{65}} = \dfrac{45}{\sqrt{65}}$

82. Dans un cercle

1. La médiatrice de [OB] est (CD) car elle coupe ce segment en son milieu et elle est perpendiculaire à (OB).

2. OD = DB car D est sur la médiatrice.

OD = OB car ce sont des rayons.

3. ODBC est un losange car ces quatre côtés sont égaux.

83. Maquette d'un abri de jardin

2. Volume des deux parties :

$$4 \times 3 \times 2{,}8 + \frac{4 \times 2{,}8}{2} \times 3 = 50{,}4$$

84. Aires de carrés

1. $AC = 10\sqrt{2}$

2. $DE = \sqrt{AE^2 + AD^2} = \sqrt{AC^2 + AD^2}$

$= \sqrt{200 + 100} = \sqrt{300}$

3. Aire de DEFG = 300 qui est le triple de l'aire de ABCD.

Exercices d'approfondissement

p. 128-129

85. Sur la piste

Il faut tracer les segments parallèles à [AB] à une distance de 3 cm de part et d'autre de [AB] et les demi-cercles de centre A et B et de rayon 3 cm.

86. Appartenance ou pas

1. $AC = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ donc le point A appartient au cercle de centre C et de rayon 5.

2. $BA = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53}$ et $BC = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52}$ donc le point B n'appartient pas à la médiatrice de [AC].

3. Le milieu de [AC] a comme coordonnées $\left(\dfrac{9+5}{2} ; \dfrac{1+7}{2}\right)$ soit (7 ; 4) ce qui correspond aux coordonnées du point D donc oui.

4. $AE = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{53}$ et $BE = \sqrt{14^2+4^2} = \sqrt{212}$ $= 2\sqrt{53}$ donc on a BE = AE + AB et les points sont alignés (ou on remarque que A est le milieu de [BE]).

87. Repères non orthonormés

1. A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1), C(1 ; 1), I(0,5 ; 0), J(1 ; 0,5), K(0,5 ; 1) et L(0; 0,5).

2. Le milieu de [IK] est (0,5; 0,5) et celui de [JL] également.

88. Changement de repère

a) A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), D(– 1 ; 0,5), E(0 ; 0,5), F(– 1 ; 0), G(0 ; – 0,5) et H(0,5 ; 0,5).

b) F(0 ; 0), D(1 ; 0), A(0 ; 1), B(0 ; 2), C(2 ; 1), E(1 ; 1), G(– 1 ; 1) et H(1 ; 1,5).

89. Une équivalence

Si I est le milieu de [AB] alors $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ et dans le repère (M ; A, B) on sait que A(1 ; 0) et B(0 ; 1) donc $I\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

Réciproquement, si $I\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$ dans le repère (M ; A, B) alors la droite passant par I et parallèle à (MB) coupe [MA] en son milieu et le théorème de Thalès montre alors que I est le milieu de [AB].

90. Enroulement cylindrique

Si on enroule la feuille selon sa largeur, alors on obtient un cylindre dont la base est un disque de périmètre $2\pi r = \ell$ et de hauteur L, son volume est :

$$\pi\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \times L$$

Si on enroule la feuille selon sa longueur alors on obtient un cylindre dont la base est un disque de périmètre $2\pi r = \ell$ et de hauteur M, son volume est : $\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \times \ell$.

Ce deuxième volume est donc plus grand que le premier car $L > \ell$.

91. Bissectrice

1. MH = AM $\sin\widehat{HAM}$

2. MK = AM $\sin\widehat{KAM}$

3. Les angles étant égaux alors MH = MK.

4. La bissectrice est donc l'ensemble des points équidistants des deux côtés de l'angle.

92. Masses volumiques

1. Le mercure tombe au fond et l'huile reste au-dessus. Si on note R le rayon du cône du fond alors les rayons successifs des autres cônes sont $2R$ et $3R$.

Il reste à calculer les volumes du cône et des troncs de cône.

• Pour le mercure :

$$V_M = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

• Pour l'eau :

$$V_E = \frac{1}{3}\pi(2R)^2(2h) - \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{7}{3}\pi R^2 h$$

• Pour l'huile :

$$V_H = \frac{1}{3}\pi(3R)^2(3h) - \frac{1}{3}\pi(2R)^2(2h) = \frac{19}{3}\pi R^2 h$$

Alors les masses sont :

• Pour le mercure :

$$m_M = V_M \times \rho_M = V_M \times 13{,}59 = \frac{13{,}59}{3}\pi R^2 h$$

• Pour l'eau :

$$m_E = V_E \times \rho_E = V_E \times 1 = \frac{7}{3}\pi R^2 h$$

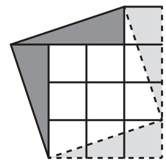
• Pour l'huile :

$$m_H = V_H \times \rho_H = V_H \times 0{,}9 = \frac{17{,}1}{3}\pi R^2 h$$

Par conséquent : $m_E < m_M < m_H$.

93. Découpage astucieux

Il y a 10 petits carrés donc pour faire un seul carré, son aire doit être de 10 donc son côté de $\sqrt{10}$ qui se construit comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côté 1 et 3. Ce qui donne le découpage puis le recollage ci-dessous.



94. Surface de croissants

L'aire coloriée en rouge est la somme des aires de quatre demi-disques (donc de deux disques) et d'un carré auxquelles on retire un disque.

Ce qui donne :

$$a^2 + 2\times\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$$

95. Coordonnées du symétrique d'un point

On a : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x + x'}{2} \\ y_I = \dfrac{y + y'}{2} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 2x_I = x + x' \\ 2y_I = y + y' \end{cases}$

96. Somme constante

On calcule l'aire du triangle ABC équilatéral de deux façons : $\dfrac{\text{côté} \times \text{hauteur}}{2}$ ou en découpant avec les trois triangles MAB, MAC et MBC chacun se calcule à l'aide du côté et de la hauteur issue de M qui correspond à la distance de M à ce côté. Puis par somme on obtient bien le résultat annoncé.

97. Identification d'un quadrilatère

1. On conjecture que le quadrilatère est peut-être un carré.

2. $AB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}+2)^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}$

$BD = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}$

$CD = \sqrt{1^2 + (2+\sqrt{2})^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}$

$AD = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{14+8\sqrt{2}}$

3. Non on ne peut pas conclure.

4. Il faut calculer AC et BC.

$$AC = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{7+4\sqrt{2}}$$

$$BC = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{2})^2} = \sqrt{14+8\sqrt{2}}$$

Donc ABDC est un losange car il a quatre côtés de même longueur et il a un angle droit car $AD^2 = AB^2 + BD^2$ donc c'est un carré

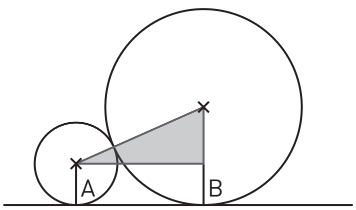
5. Le centre du carré ABDC a pour coordonnées $\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Vers la 1re

98. Utilisons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle rouge construit ci-dessous, ce qui donne donc :

$$(r+R)^2 = AB^2 + (R-r)^2$$

et quand on développe on a bien le résultat annoncé.



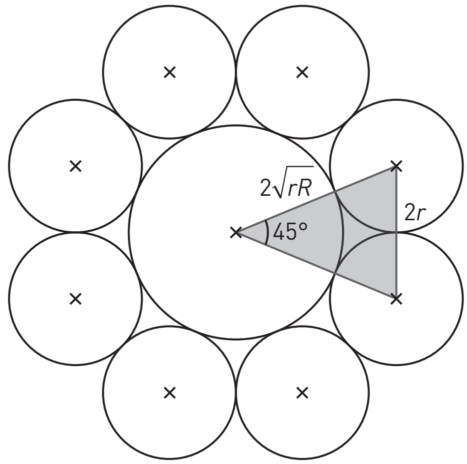
99. On utilise l'exercice précédent trois fois ce qui donne les relations :

$AB^2 = 4R_2R_3$, $AC^2 = 4R_1R_2$ et

$BC^2 = 4R_1R_3$ puis comme AC + CB = AB on remplace ce qui donne :

$2\sqrt{R_1R_2} + 2\sqrt{R_1R_3} = 2\sqrt{R_2R_3}$ d'où en simplifiant par 2 et en divisant tout par $\sqrt{R_1R_2R_3}$ on obtient le résultat annoncé.

100. Vu d'en haut, l'angle entre le centre de la grande sphère et les centres de deux petites sphères vaut 45° et on a avec l'exercice **98** les longueurs du triangle isocèle de la figure suivante.



On coupe ce triangle avec la hauteur issue du sommet isocèle en deux triangles rectangles identiques et on obtient : $\sin(22{,}5°) = \dfrac{r}{2\sqrt{rR}}$.

Avec l'aide cela donne : $\left(\dfrac{r}{2\sqrt{rR}}\right)^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$,

d'où $\dfrac{r^2}{4rR} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ ce qui donne bien $\dfrac{r}{R} = 2-\sqrt{2}$.

101. Le volume d'eau dans le vase A vaut $\pi R^2 \times 25$. Après que l'eau se soit écoulée dans le vase B, les surfaces sont dans un même plan ce qui signifie que dans le vase B l'eau atteint une hauteur h et dans le vase A l'eau atteint une hauteur $h-5$.

La somme des volumes d'eau dans les deux vases doit être celle d'origine ce qui donne :

$$\pi R^2 \times 25 = \pi R^2 h + \pi R^2(h-5)$$

D'où on obtient que $h = 15$.

Travaux pratiques p. 130-131

TP 1. L'intersection des hauteurs d'un triangle

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

B. 1. 2. (AH) est perpendiculaire à (BC) et (BC) est parallèle à d_2 donc (AH) est perpendiculaire à d_2. Le triangle MNP est homothétique du triangle ABC donc A est le milieu de [NP] et par conséquent (AH) est médiatrice de [NP]. De même pour (BH) médiatrice de [MP].

3. H est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et il est équidistant des points M, N et P.

4. D'où H est équidistant de M et de N et il appartient donc à la médiatrice de [MN].

5. Comme cette médiatrice passe par C alors la droite (CH) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

6. Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

TP 2. Formule d'Al-Kashi

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Utiliser le cosinus dans un triangle non rectangle.

1. $BH^2 = AB^2 - AH^2$

2. $CH^2 = AC^2 - AH^2$

3. $CH^2 = (BC - BH)^2 = BC^2 + BH - 2BC \times BH$

4. Les questions **1** et **2** donnent :

$CH^2 - BH^2 = AC^2 - AB^2$ d'où en remplaçant dans la question **3** on a :

$AC^2 - AB^2 = B^2 - 2BC \times BH$ qui donne :

$$BH = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC}$$

5. $\cos\hat{B} = \dfrac{BH}{AB}$

6. $\cos\hat{B} = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC} \times \dfrac{1}{AB}$

7. Quand le triangle est rectangle on retrouve le théorème de Pythagore.

TP 3. Relation trigonométrique

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir des relations entre le cosinus et le sinus.

1. $\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ et $\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC}$

2. $\cos\hat{C} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\sin\hat{C} = \dfrac{AB}{BC}$

3. $\cos\hat{B} = \sin\hat{C}$ et $\sin\hat{B} = \cos\hat{C}$

4. $(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2 = \left(\dfrac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$

$$= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

5. Pythagore donne $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

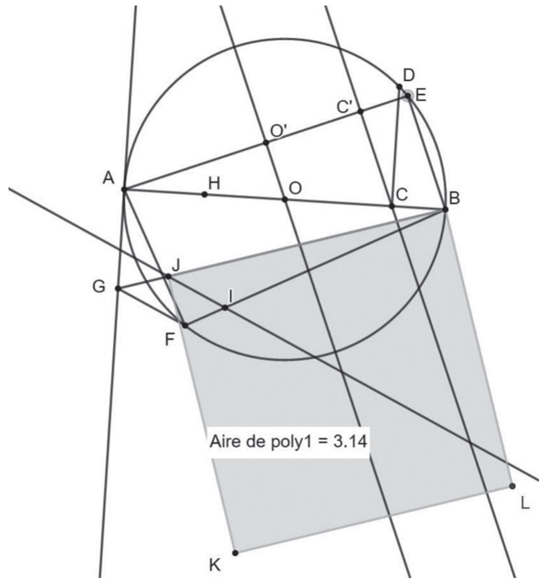
Donc $(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2 = 1$.

De même pour l'angle $\hat{C}$.

TP 4. Quadrature du cercle p. 131

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Faire une construction géométrique permettant d'approximer le nombre π.

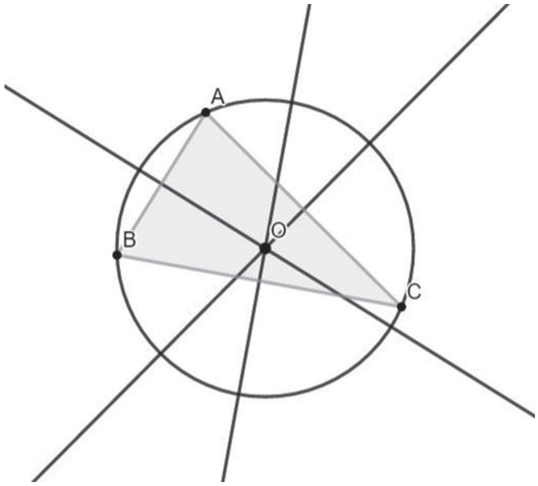
1. à **7.** On obtient la figure suivante.



TP 5. Intersection des médiatrices dans un triangle

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et le cercle circonscrit d'un triangle.

▶ A. Construction des médiatrices d'un triangle



▶ B. Concourance des médiatrices

1. Les médiatrices sont concourantes car les droites (AB) et (AC) sont sécantes.

2. O est donc équidistant de A et B et aussi de A et C donc finalement des trois sommets.

3. Donc O est équidistant de B et C donc il appartient à la médiatrice de [BC].

4. Le cercle passant par les trois sommets a donc comme centre le point concours des médiatrices.

▶ C. Cas du triangle rectangle

1 et **2.** Quand le triangle est rectangle on remarque que le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse du triangle.

En autonomie p. 132-133

Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes

102. c **103.** b **104.** a

105. b **106.** b **107.** c

108. c **109.** b

110. 1. Avec le théorème de Pythagore :

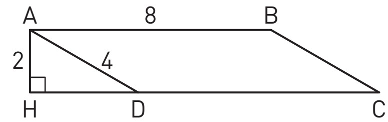
$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 62 + 42 = 52$

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 42 + 32 = 25$ donc finalement :

$BC = 9$, $AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ et $AC = 5$.

2. $AC^2 + AC^2 = 25 + 52 \neq 81$ donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

111 1.



2. Dans le triangle ADH, on a :

$\sin\widehat{ADH} = \frac{AH}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ADH} = 30°$.

3. Donc ADC = 30°.

4 Aire de ABCD = AB × AH = 8 × 2 = 16

112. 1.

$$\text{Volume de ABCDH} = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times DH = \frac{1}{3} \times 10 \times 3 \times 2 = 20$$

2.

$$\text{Volume de ABDH} = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AD}{2} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 3}{2} \times 2 = 10$$

113. 1. L'aire du triangle ABC est :

$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$ ou aussi $\frac{AC \times BH}{2} = \frac{10 \times BH}{2}$

donne BH = 4,8 en ayant calculé AC avec le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

2. Aire de AHBK = AH × BH et on calcule AH avec le théorème de Pythagore dans ABH qui donne : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 8^2 - 4{,}8^2 = 40{,}96$ d'où AH = 6,4 et donc l'aire de AHBK vaut 30,72.

114. 1. $\tan\widehat{CBD} = \frac{CD}{BC} = \frac{3{,}7}{BC}$ donne :

$$BC = \frac{3{,}7}{\tan 32°} \approx 5{,}9$$

2. $\cos\widehat{BCA} = \frac{BC}{AC} = \frac{5{,}9}{8}$ donne $\widehat{BCA} = 42{,}3°$.

115. 1. $AE^2 + DE^2 = 4{,}2^2 + 6^2 = 53{,}64 \neq 7^2$ donc le triangle ADE n'est pas rectangle.

2. Le théorème de Thales donne $\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DE}$,

d'où $FG = DE \times \frac{AF}{AD} = 6 \times \frac{2{,}5}{7} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1$.

Calculer avec des coordonnées

116. c **117.** b **118.** c

119. a **120.** a **121.** a

122. b **123.** c

124. 1. AC = 5, AH = 4 et CH = 3, donc $AC^2 = AH^2 + CH^2$ et le triangle ACH est rectangle en H.

$BC = \sqrt{45}$ et BH= 6 donc $CH^2 + BH^2 = BC^2$ et le triangle est rectangle en H.

2. Dans le triangle ACH, $\cos\widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{4}{5}$ donc $\widehat{CAH} = 36{,}9°$ donc $\widehat{ACH} = 90° - 36{,}9° = 53{,}1°$.

Dans le triangle ABH, $\cos\widehat{CBH} = \frac{BH}{BC} = \frac{6}{\sqrt{45}}$ donc $\widehat{CBH} = 26{,}6°$ donc $\widehat{BCH} = 90° - 26{,}6° = 63{,}4°$.

3. On en déduit que $\widehat{BCA} = 116{,}5° \neq 90°$ donc le triangle n'est pas rectangle.

125. 1. ABCD est un parallélogramme donc D est le symétrique de B par rapport au milieu de [AC] qui est le centre du parallélogramme soit $O\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$

donc $\begin{cases} \frac{7}{2} = \frac{6 + x_D}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{1 + y_D}{2} \end{cases}$ alors D (1 ; 4).

2. On a : $AH^2 = 9$, $CH^2 = 121$ et $AC^2 = 130 = AH^2 + CH^2$ donc le triangle est rectangle en H.

3. On a : CH = 11, CD = AB = 8 et DH = 3 donc C, D et H sont alignés.

4. Par conséquent H est le projeté orthogonal de A sur (CD) et l'aire du parallélogramme est $AB \times AH = 9 \times 8 = 72$.

126. B milieu de [AC] donc B(−3 ; 8).

127. E milieu de [DF] donc F(5 ; −3).

128. 1. Le milieu de [MT] est le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{24}\right)$.

2. H est le symétrique de A par rapport au milieu de [MT] donc $H\left(-\frac{22}{15}; -\frac{29}{12}\right)$.

129. Le cercle de diamètre [AD] a pour centre le point O (1 ; −2) et pour rayon $2\sqrt{5}$.

On calcule $OB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ et $OC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ donc le cercle passe par B et C.

130. 1. La médiatrice passe par le milieu de [IB] et donc $H\left(\frac{5}{2}; 2\right)$.

2. Le cercle a pour rayon $HI = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$ et on calcule $HB = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$ donc B est sur le cercle.

3. On calcule $CH = \sqrt{\frac{25}{4} + 0} = \frac{5}{2}$ donc C est sur le cercle.

CHAPITRE 6 Vecteurs du plan

Manuel p. 134-161

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre traite la notion de vecteur en s'appuyant sur la notion de translation déjà vue au collège.

L'élève apprend dans un premier temps à les manipuler sans coordonnées pour s'approprier ce nouvel objet mathématique.

Translation et vecteurs : définition, vocabulaire.

Somme de deux vecteurs : de nombreuses constructions pour acquérir des automatismes.

Produit d'un vecteur par un nombre réel : observation des effets sur la norme, la direction et le sens, constructions.

Dans un second temps, on introduit les coordonnées de vecteurs pour résoudre des problèmes d'alignement et de parallélisme.

Bases, repères et coordonnées : coordonnées d'un vecteur, d'un vecteur somme, d'un vecteur multiplié par un réel, de la norme d'un vecteur.

Colinéarité de vecteurs : définition, introduction du déterminant puis démonstration liant les deux avant d'en voir leur utilisation.

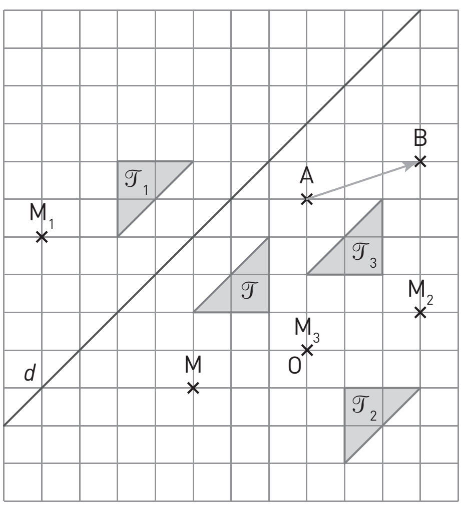
Capacités

- → Représenter géométriquement des vecteurs et construire leur somme.
- → Construire le produit d'un vecteur par un nombre réel.
- → Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- → Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- → Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 135

1. Compléter une figure en faisant des constructions



2. Effectuer des calculs

a) -8 **b)** 2 **c)** -23 **d)** $\frac{3}{2} = 1{,}5$

e) 0 **f)** 33 **g)** 65 **h)** $\frac{5}{6}$

3. Calculer des longueurs et des milieux à partir de coordonnées

1. $A(-4\ ;\ 1)$, $B(-3\ ;\ -2)$, $C(2\ ;\ 1)$

2. $M(-1\ ;\ 1)$ **3.** $N\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$

4. $AC = 6$ **5.** $BC = \sqrt{34}$

4. Identifier un parallélogramme

a) Non **b)** Non **c)** Non **d)** Oui

5. Reconnaître des tableaux de proportionnalité

a) Oui $k = -\frac{3}{2}$ **b)** Non **c)** Oui $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** Non

Activités p. 136-137

Activité 1. Découvrir les vecteurs

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** S'appuyer sur la notion de translation pour découvrir les vecteurs

1. a) Le kitesurfeur et le cerf-volant font un mouvement rectiligne, de glissade vers la droite.

b) On reconnaît une translation.

2. a) L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est A′.

b) L'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est C′.

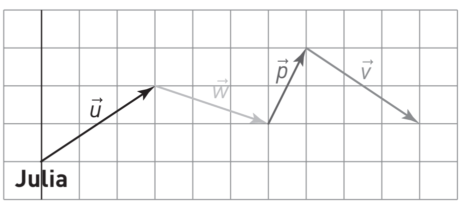
c) $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$, ... sont égaux entre eux et égaux à $\overrightarrow{HH'}$.

3. a) Les segments ont tous la même longueur.

b) Le quadrilatère CC′ D′ D semble être un parallélogramme.

Activité 2. Enchaîner deux translations

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectifs :** Construction géométrique de la somme de deux vecteurs à partir d'un enchaînement de translations.



1. c) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{m}$

2. c) $\vec{p} + \vec{v} = \vec{n}$

Activité 3. Multiplier un vecteur par un nombre réel

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Observer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique l'effet d'une multiplication d'un vecteur par un réel.

3. a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens et même longueur.

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens et $\vec{v} > \vec{u}$.

c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, sont de sens opposés et ont même longueur.

d) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, même sens et $\vec{v} < \vec{u}$.

e) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction, sont de sens opposés et $\vec{v} < \vec{u}$.

Activité 4. Découvrir le lien entre coordonnées de points et coordonnées de vecteurs

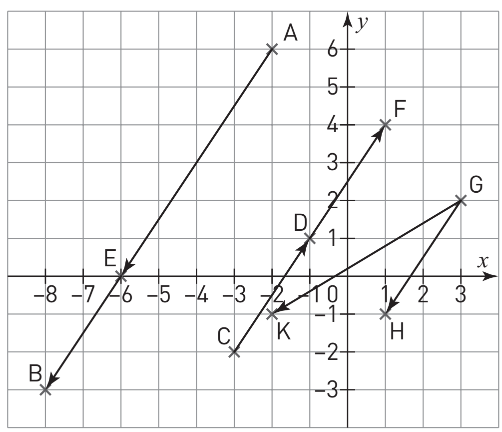
- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Émettre une conjecture sur l'expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.

3. On conjecture que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Activité 5. La colinéarité, à quoi ça sert ?

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir la colinéarité pour étudier des positions relatives de droites.

1. 2. a)



b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{GH}$ semblent avoir la même direction que $\overrightarrow{CD}$.

c)

Vecteurs	$\overrightarrow{CD}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{CF}$	$\overrightarrow{GH}$
Première coordonnée	2	-6	-4	4	-2
Deuxième coordonnée	3	-9	-6	6	-3

3. En vérifiant tous les produits en croix (par exemple $2 \times (-9) = 3 \times (-6)$), on vérifie que ce tableau est bien un tableau de proportionnalité.

4. $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{CD}$.

5. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Les droites (CD) et (CF) sont confondues et les droites (GH) et (GK) sont sécantes. On peut conjecturer que lorsque les vecteurs sont colinéaires, les droites sont parallèles.

À vous de jouer ! p. 144-149

1. 1. $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DG}$

2. $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DG}$ donc EHGD est un parallélogramme.

3. E milieu de [FH] car $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EH}$.

2. 1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RP}$

2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QR}$ donc MNRQ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RP}$ donc MNPR est un parallélogramme.

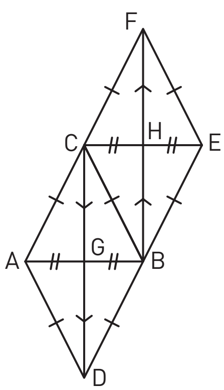
3. 1. Par construction, D est le milieu de [AJ] et [KI] donc AIJK est un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{KJ}$. De plus $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$.

3. ICJK est un parallélogramme car $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{KJ}$.

4. (KI) et (JC) sont parallèles.

4. 1.

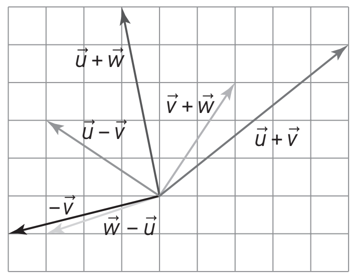


2. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$ donc AFED est un parallélogramme. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ donc ACEB est un parallélogramme.

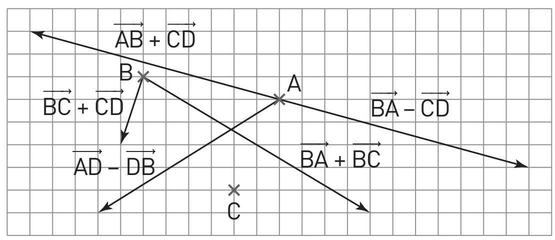
3. ACEB est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$. H milieu de [CE] et G milieu de [AB] donc $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{GB}$.

4. $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{GB}$ et les diagonales d'un losange sont perpendiculaires donc CHBG est un rectangle.

5.



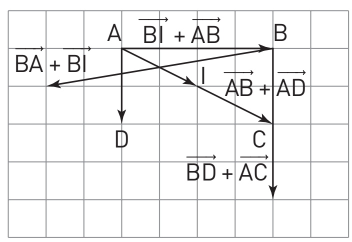
6.



7. a) $\overrightarrow{AD}$ **b)** $\overrightarrow{HD}$ **c)** $\overrightarrow{CF}$

d) $\vec{0}$ **e)** $\overrightarrow{ED}$ **f)** $\overrightarrow{BL}$

8.



9. 1. $\frac{1}{3}\vec{u} = \vec{x}$, $-\vec{u} = \vec{z}$, $3\vec{u} = \vec{w}$, $-\frac{2}{3}\vec{u} = \vec{v}$ et $-\frac{4}{3}\vec{u} = \vec{y}$.

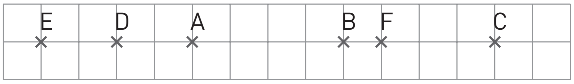
2. a) Même sens que $\vec{u}$: $\vec{x}$ et $\vec{w}$.

b) Norme supérieure à celle de $\vec{u}$: $\vec{w}$ et $\vec{y}$.

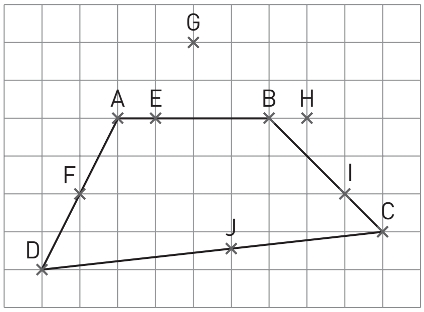
c) Même direction que celle de $\vec{u}$:

tous les vecteurs.

10.



11. 1.



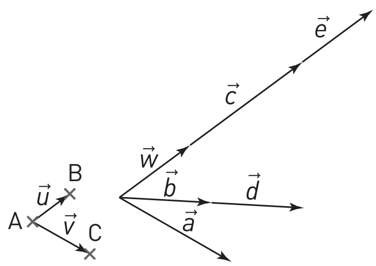
2. a) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

12. Sur la figure $2\vec{u} = \vec{w}$, $2\vec{v} = \vec{a}$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{b}$ et $5\vec{u} = \vec{c}$.

$2\vec{u} + 2\vec{v} = 2(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{d}$ $\qquad$ $2\vec{u} + 5\vec{u} = 7\vec{u} = \vec{e}$



13. 1. $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}-11\\9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}11\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}3\\-11\end{pmatrix}$

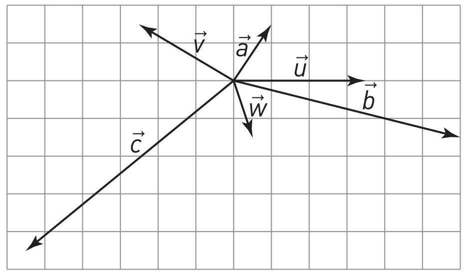
3. $\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

14. 1. $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$

2. $\vec{c} = 3\vec{w} - 2\vec{u}\begin{pmatrix}-11\\-9\end{pmatrix}$

3.

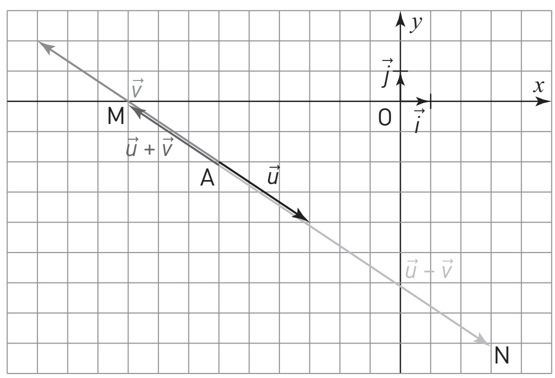


15. 2. a) $\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-8\\8\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}0{,}6\\-3\end{pmatrix}$

16. 1. M(−8 ; 0) $\qquad$ **2.** N(4 ; −8)

3.



17. E(3 ; 45)

18. H(−5 ; −1)

19. 1. a) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -16$

b) $\det(\vec{v}, \vec{w}) = -4$ $\qquad$ **c)** $\det(\vec{w}, \vec{r}) = -8$

2. Les vecteurs colinéaires entre eux sont $\vec{u}$ et $\vec{w}$, ainsi que $\vec{v}$ et $\vec{r}$.

20. 1. $\vec{u} = 4\vec{v} = 4 \times \frac{1}{2}\vec{w} = 2\vec{w}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

2. $\vec{u} = 5\vec{v} = 5 \times \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{5}{3}\vec{w}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

21. 1. $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

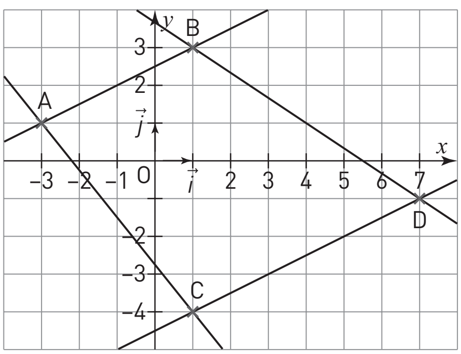
2. $\det(\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{KM}) = 27 \neq 0$

3. K $\notin$ (LM)

22. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 145 \\ -40 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} -90 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\det(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}) = 25 \neq 0$ donc les droites sont sécantes.

23. $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PN}$ donc les points sont alignés.

24. 1.



2. a) (AB) et (CD) sont parallèles.

b) (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

Exercices d'application p. 150-153

Apprendre à apprendre

25. 1. Direction, sens, norme.

2. Il faut les mettre bout à bout.

3. Ils ont même direction, le même sens si $k > 0$, un sens contraire si $k < 0$. Ils n'ont pas la même longueur.

26. 1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Si on multiplie un vecteur par un réel k, alors ses coordonnées sont multipliées par k :

$k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

27. 1. Des vecteurs sont colinéaires, des droites sont parallèles.

2. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$ est un nombre.

Le déterminant sert à savoir si deux vecteurs sont colinéaires.

Questions – Flash

28. 1. L'image de l'hexagone ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'hexagone ⑥.

2. L'image de l'hexagone ④ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'hexagone ⑥.

3. L'image de l'hexagone ⑦ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$ est l'hexagone ③.

4. L'image de l'hexagone ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE}$ est l'hexagone ⑤.

29. a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$

c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{CF}$

d) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

e) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB}$

f) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$

30. • $\vec{c} = -3\vec{a}$ • $\vec{b} = -\vec{e}$ • $\vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{g}$ • $\vec{d} = \frac{2}{5}\vec{i}$

• $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{c}$ • $\vec{b} = -2\vec{h}$ • $\vec{i} = -\frac{5}{3}\vec{g}$ • $\vec{f} = -\frac{2}{3}\vec{c}$

31. a) A(1 ; 2) **b)** B(2 ; 1) **c)** $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ **e)** $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$ **f)** $\overrightarrow{DO}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

32. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $AB = \sqrt{53}$

c) Milieu de [AB] : $\left(\dfrac{3}{2} ; 0\right)$

33. Les vecteurs suivants sont colinéaires :

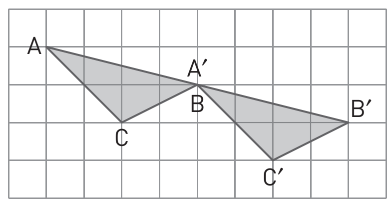
$\vec{v}_3$ et $\vec{v}_6$.

Il en est de même pour $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_5$.

34. a) $y = -2$ **b)** $y = 4$

Translation et égalités de vecteurs

35. 1.



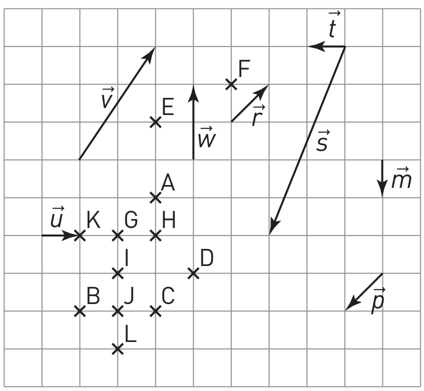
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{CC'}$

3. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$

4. $\overrightarrow{A'C'}$

36. 1. a) $\vec{r}$ **b)** $\vec{m}$ **c)** $\vec{t}$ **d)** $\vec{v}$

2.



37. 1. L'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point Y.

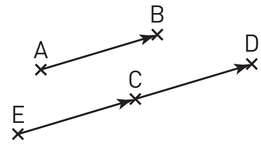
L'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point Z.

L'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point D.

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{DZ} = \overrightarrow{ED}$

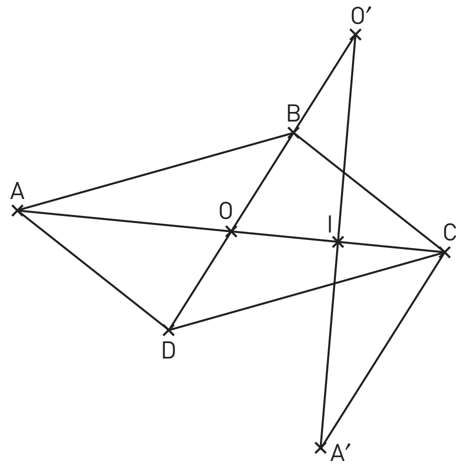
3. ABYC, ABZD et ABDE sont des parallélogrammes.

38.



C est le milieu de [ED] car EC = AB = CD = et les points E, C et D sont alignés car $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

39.

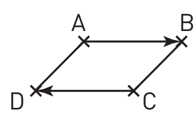


3. a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA'}$ donc BCA′D est un parallélogramme donc $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.

b) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO'}$ donc $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.

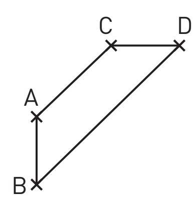
c) $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$ donc A′CO′O est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en leur milieu donc I est le milieu de [A′O′].

40. 1. et **2. a)** Faux



Réciproque : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABCD est un parallélogramme : Faux.

b) Faux

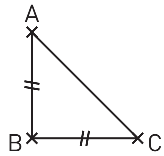


Réciproque : Si ABDC est un parallélogramme alors AB = CD : Vrai.

c) Vrai

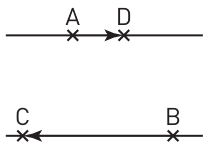
Réciproque : Si A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: Faux.

d) Faux



Réciproque : Si B est le milieu de [AC] alors AB = BC : Vrai.

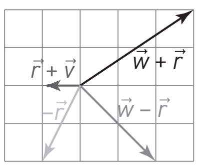
e) Faux



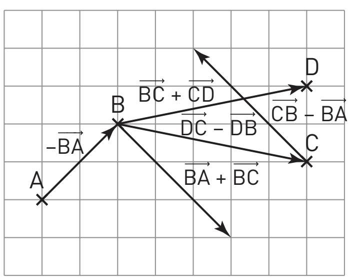
Réciproque : Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ alors (AD) // (BC) : Vrai.

Somme, différence et opposés de vecteurs

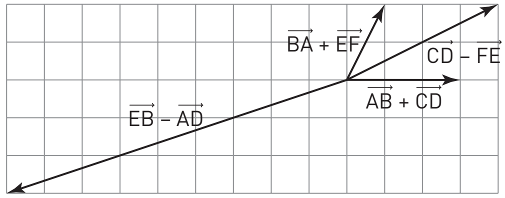
41. 1. et **2**



42. 1. et **2.**



43. 1. et **2.**

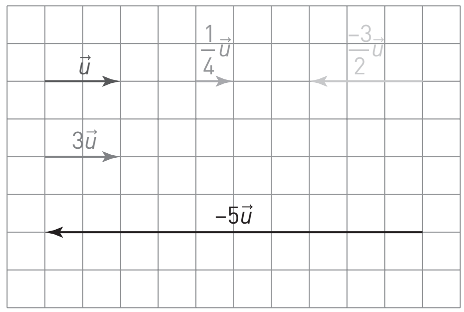


44. a) $\overrightarrow{DF}$ **b)** $\overrightarrow{GH}$ **c)** $\overrightarrow{AD}$ **d)** $\overrightarrow{BH}$ **e)** $\overrightarrow{BC}$

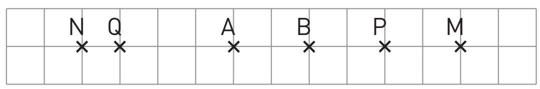
f) $\overrightarrow{IE}$ **g)** $\overrightarrow{AC}$ **h)** $\overrightarrow{CD}$ **i)** $\overrightarrow{IF}$

Produit de vecteurs par des nombres réels

45.



46. a) b) c) et **d)**



47. a) $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{BA} = 4\,\overrightarrow{BD}$.

b) $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{BE}$.

c) $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CF}$.

d) $\overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

Manipulation algébrique

48. a) $1\vec{u}$ ou $\vec{u}$

b) $-2\vec{u} - 3\vec{v}$

c) $-24\vec{v}$

d) $-8\vec{u} + 7\vec{v}$

49. a) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF}$

c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{ME} = \vec{0}$

e) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$

f) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$

50. a) $\overrightarrow{BA}$ **b)** $\overrightarrow{BD}$ **c)** $\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AD}$ **e)** $2\overrightarrow{BD}$ **f)** $\overrightarrow{BD}$

51. a)

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA}$$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

52. a)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

b)

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB} - 4\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}$$

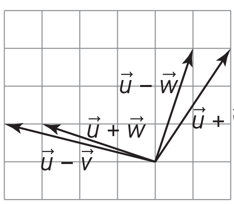
Coordonnées de vecteurs

53. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{r}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

54. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}$

55. 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

2.



$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \vec{u} + \vec{w}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ et

$\vec{d} = \vec{u} - \vec{w}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

56. 1. A(1; 1) B(3; 4) C(−4; 3) D(−2; −2) E(1; −2) F(3; 0) G(−2; 4)

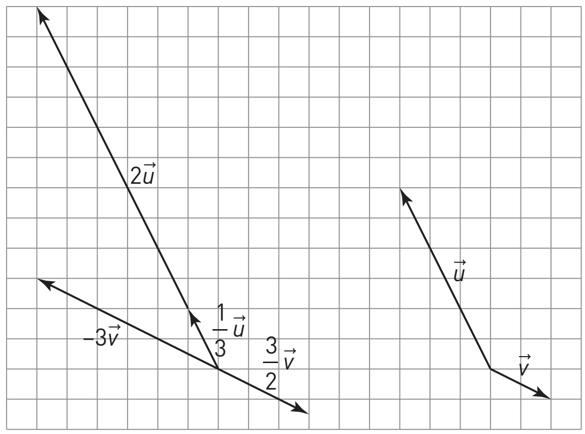
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$ qui a comme coordonnées $\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$.

57. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

58. 1. et **2.**



$\overrightarrow{2u}\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$, $-3\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\frac{3}{2}v}\begin{pmatrix}3\\-1{,}5\end{pmatrix}$

59. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{3u}\begin{pmatrix}-3\\18\end{pmatrix}$, $-4\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-24\end{pmatrix}$, $\frac{2}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\4\end{pmatrix}$, $-4{,}5\vec{u}\begin{pmatrix}4{,}5\\-27\end{pmatrix}$

60. $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

61. $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$, $\vec{m}\begin{pmatrix}3\\-8\end{pmatrix}$, $\vec{z}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

62. $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}9\\18\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$

63. $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 10$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{26}$, $\|\vec{m}\| = \sqrt{58}$, $\|\vec{n}\| = 5$

Relation vectorielle avec un point inconnu

64. B(3 ; 5) **65.** H(6 ; – 1)

66. C(11 ; – 16) **67.** Q(– 17 ; 7)

Colinéarité de vecteurs

68.1. 2. et **3. a)** det $(\vec{u},\vec{v}) = 0$, donc les vecteurs sont colinéaires, $k = -\frac{3}{2}$.

b) $\det(\vec{s},\vec{t}) = 56$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

c) $\det(\vec{u},\vec{r}) = -18$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) $\det(\vec{v},\vec{w}) = 0$, donc les vecteurs sont colinéaires, $k = -\frac{8}{3}$.

e) $\det(\vec{s},\vec{m}) = 5$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

f) $\det(\vec{m},\vec{t}) = 10$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

69. 1. 2. et **3. a)** $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, leur déterminant vaut 0 donc les vecteurs sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$, leur déterminant vaut 0 donc les vecteurs sont colinéaires.

c) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, leur déterminant vaut 28 donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) $\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, leur déterminant vaut – 14 donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

70. a) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 1$ donc les droites ne sont pas parallèles.

b) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 0$ donc les droites sont parallèles.

c) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = 2$ donc les droites ne sont pas parallèles.

71. a) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$ donc les points sont alignés.

b) $\det(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}) = 0$ donc les points sont alignés.

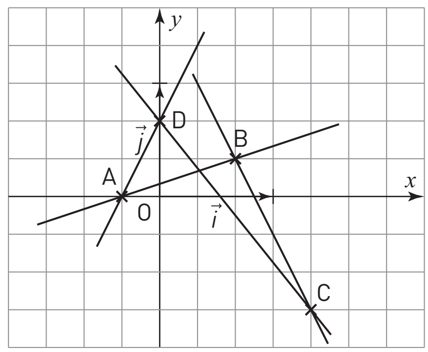
c) $\det(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}) = -1$ donc les points ne sont pas alignés.

72. a) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$ donc le point $C \in (AB)$.

b) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$ donc le point $C \in (AB)$.

c) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -1$ donc le point $C \notin (AB)$.

73. 1.



2. a) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \frac{19}{9}$ donc les droites ne sont pas parallèles.

b) $\det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}) = \frac{8}{9}$ donc les droites ne sont pas parallèles.

Calculs et automatismes

74. a) – 1 **b)** – 5,5 **c)** 10 **d)** 4 **e)** $\frac{1}{2}$

f) 11 **g)** 9 **h)** 36 **i)** 49

75. $3\vec{u} + 2\vec{v}\begin{pmatrix}3\\16\end{pmatrix}$, $-\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$

76. A = $15x^2 - 2x - 8$

B = $4x^2 - 20x + 25$

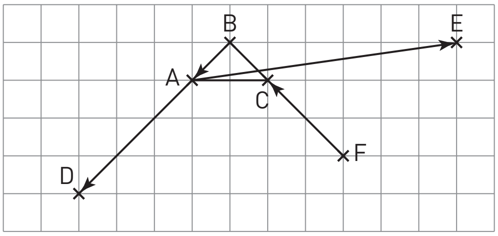
C = $x^2 - 36$

D = $6x^3 - 14x$

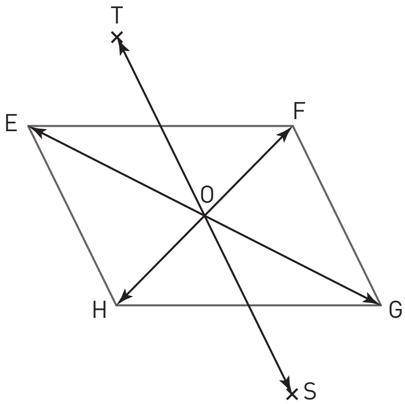
Exercices d'entraînement p. 154-155

Sans coordonnées

77.

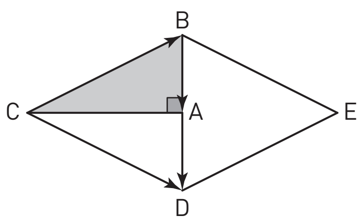


78. 1.



2. $\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}$ or O est le centre du parallélogramme EFGH donc c'est le milieu des diagonales [HF] et [EG] donc $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OS}=\vec{0}$.

79. 1.



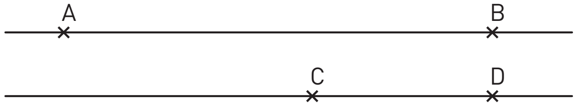
2. BCDE est un losange car, par construction, c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

80. a) Vrai

Réciproque: Si les points A, B et C sont alignés alors $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$: Faux.

b) Vrai

Réciproque: Si (AC) // (BD) alors $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$: Faux



c) Vrai

Réciproque: Si $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ alors ABCD est un parallélogramme : Vrai.

d) Vrai

Réciproque : S'il existe k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ alors ABCD est un trapèze : Vrai

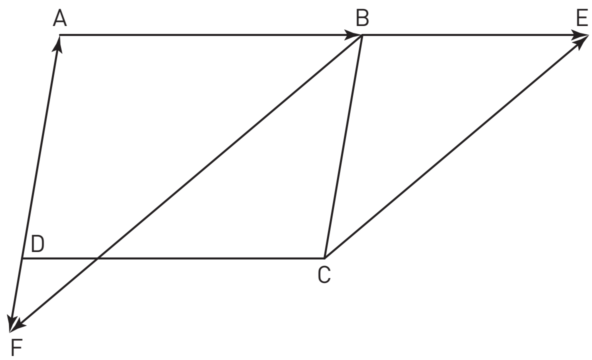
81. a) Oui **b)** Oui

c) Non **d)** Oui

e) Non **f)** Oui

82. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AN}$ donc les vecteurs sont colinéaires, on en déduit que A, M et N sont alignés.

83. 1.



2. $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}$

3. $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

4. $\overrightarrow{BF}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{CE}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont alignés donc les droites (BF) et (CE) sont parallèles.

Égalités et coordonnées

84. a) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et $\vec{v}+\vec{u}\begin{pmatrix} x'+x \\ y'+y \end{pmatrix}$ de plus

$x+x'=x'+x$ et $y+y'=y'+y$ donc $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.

b) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\begin{pmatrix}(x+x')+x''\\(y+y')+y''\end{pmatrix}$, $\vec{u}+(v+\vec{w})\begin{pmatrix}x+(x'+x'')\\y+(y'+y'')\end{pmatrix}$

et $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'+x''\\y+y'+y''\end{pmatrix}$.

De plus, $x+x'+x''=(x+x')+x''=x+(x'+x'')$ et $y+y'+y''=(y+y')+y''=y+(y'+y'')$ donc

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

c) $\vec{u}+(-\vec{u})\begin{pmatrix}x+(-x)\\y+(-y)\end{pmatrix}$ et $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

De plus $x+(-x)=0$ et $y+(-y)=0$ donc $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+\vec{0}\begin{pmatrix}x+0\\y+0\end{pmatrix}$ et $x+0=0$ et $y+0=0$ d'où $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

e) $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+(-\vec{v})\begin{pmatrix}x+(-x')\\y+(-y')\end{pmatrix}$.

De plus $x+(-x')=x-x'$ et $y+(-y')=y-y'$ donc

$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

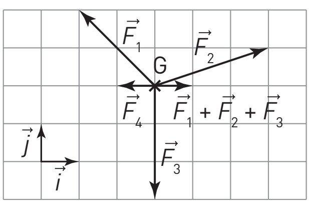
85. 1. $\vec{v}=\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N-x\\y_N-y\end{pmatrix}$

2. $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$

3. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x_N-x\\y+y_N-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}$

Avec des coordonnées

86.



87. $C\begin{pmatrix}\frac{3}{2};0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\12\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}3,5\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3,5\\-6\end{pmatrix}$

88. 1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

Les vecteurs sont égaux donc MNPQ est un parallélogramme.

2. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NP}=\sqrt{34}$ et $\overrightarrow{MP}=\sqrt{68}$, donc :

$MN^2+NP^2=MP^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MNP est rectangle en N donc MNPQ est un rectangle avec 2 côtés consécutifs égaux, c'est donc un carré.

3. a) Le repère n'est pas orthonormé car (MN) et (MP) ne sont pas perpendiculaires.

b) La base est orthonormée car (MN) et (MQ) sont perpendiculaires et $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MQ}$.

89. 1. D(−1 , 1)

2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\sqrt{13}$ donc ABCD est un losange car c'est un parallélogramme avec 2 côtés consécutifs égaux.

90. $G\begin{pmatrix}\frac{1}{4};1\end{pmatrix}$

91. $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ donc $k=-\frac{1}{2}$

92.

```
def droitesparalleles(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):
  x1=xB-xA
  y1=yB-yA
  x2=xD-xC
  y2=yD-yC
  if x1*y2-y1*x2==0:
    print("Les droites sont parallèles")
  else:
    print("Les droites ne sont parallèles")
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
xC=float(input("xC=?"))
yC=float(input("yC=?"))
xD=float(input("xD=?"))
yD=float(input("yD=?"))
droitesparalleles(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD)
```

93.

```
def pointsalignes(xA,yA,xB,yB,xC,yC):
  x1=xB-xA
  y1=yB-yA
  x2=xA-xC
  y2=yA-yC
  if x1*y2-y1*x2==0:
    print("Les points sont alignés")
  else:
    print("Les points ne sont pas alignés")
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
xC=float(input("xC=?"))
yC=float(input("yC=?"))
pointsalignes(xA,yA,xB,yB,xC,yC)
```

Travailler autrement

94. Associations : ① et ⑭, ② et ⑪,③ et ⑧, ④ et ⑨, ⑤ et ⑩, ⑥ et ⑫, ⑦ et ⑬.

95. Dans un repère orthonormé correspondant au quadrillage : $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}13\\-8\end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AH}) = -6 \times (-8) - 4 \times 13 = -4 \neq 0$, donc les droites (BF) et (AH) ne sont pas parallèles donc le quadrilatère ACBD n'est pas un rectangle.

96. • Voie (en latin *vĭa*): « conduite à suivre »

• Véhicule (en latin *vehiculum*): « moyen de transport »

• Voiture (en latin *veiture*) : « transport »

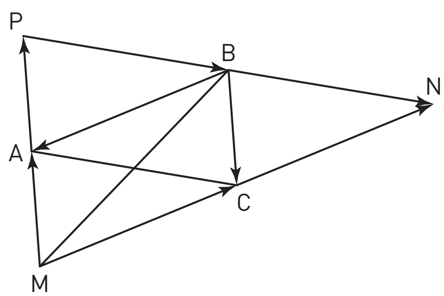
• Invective (en latin *invectus*): « être transporté (par la colère) », d'où (en latin *invectivus*) « outrageant »

• vecteur (en latin *vectura*): «transport»; (en latin *vector*) : « qui transporte »

Exercices bilan p. 156

97. Triangles imbriqués

1. et **2.**

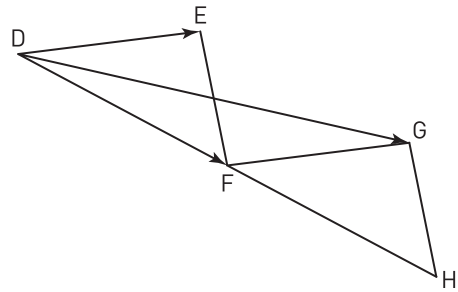


3. $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{AC}$

De plus A est le milieu de [PM], donc $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AM}$, or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BC}$, on en déduit que PACB est un parallélogramme, donc que $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC}$. On a donc $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$ et B est le milieu du segment [PN]. A, B et C sont les milieux des côtés du triangle PNM.

98. Triangles asymétriques

1.



2. Par construction, DEGF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EG}$. Par symétrie, $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FH}$. Donc le triangle FGH est l'image du triangle DEF par la translation de vecteur $\overrightarrow{DF}$.

99. Points alignés

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$ donc M, N et P sont alignés.

100. Nature d'un quadrilatère

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-12\\2\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2. a) M(– 3 ; 6), N(2 ; – 1)

b) $\overrightarrow{MD}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$,$\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{BN}) = 0$.

c) $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \sqrt{37} = \left\|\overrightarrow{BN}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{74}$.

d) $MN^2 = BM^2 + BN^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BMN est rectangle en B.

e) MBND est un parallélogramme (car (MD) et (BN) sont parallèles), qui possède un angle droit et deux côtés consécutifs égaux, c'est donc un carré.

101. Théorème de Varignon

1. Après avoir réalisé la figure, puis bougé les points, on conjecture que IJKL est un parallélogramme.

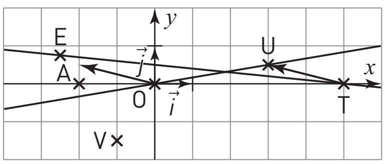
2. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

4. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc IJKL est un parallélogramme.

102. Position relative de droites

1.



2. $E\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{3}{4}\right)$ **3.** $U\left(3\,;\frac{1}{2}\right)$

4. $\overrightarrow{OU}\begin{pmatrix}3\\0{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ET}\begin{pmatrix}7{,}5\\-0{,}75\end{pmatrix}$ donc

$\det(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{ET}) = -\frac{9}{4} - \frac{15}{4} \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (OU) et (ET) sont sécantes.

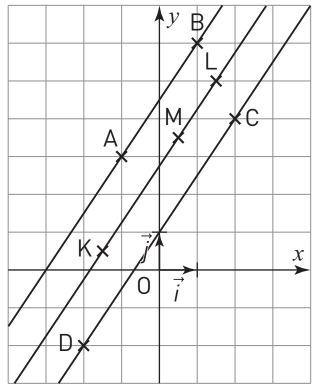
103. Droites parallèles et points alignés

1. K(– 1,5 ; 0,5), L(1,5 ; 5), M(0,5 ; 3,5)

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

3. $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}3\\4{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}) = 0$ donc les vecteurs sont colinéaires donc les points K, L et M sont alignés.

4.



104. Coordonnée inconnue

1. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}) = 0$ donc les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

2. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BD}$ donc les points B, C et D sont alignés.

3. M ∈ (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}25-6\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires, si et seulement si $-57 + 9(y-3) = 0$, si et seulement si $9y = 84$, si et seulement si $y = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}$.

Exercices d'approfondissement

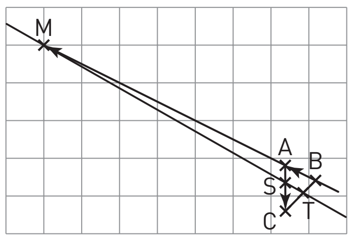
p. 157

105. Points alignés (1)

$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ si et seulement si $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, si et seulement si les points A, B et C sont alignés.

106. Points alignés (2)

En décomposant $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SM}$ selon les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{AB}$, on trouve qu'il faut que $\overrightarrow{AM} = -8\overrightarrow{AB}$ pour que S, T et M soient alignés.



107. Symétrie centrale

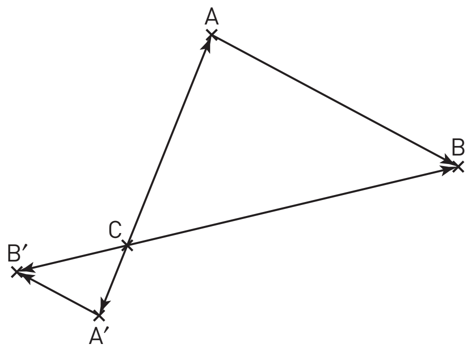
1. E(8 ; 0), D(4 ; 1), $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{E'D'}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{E'D'}$ donc les vecteurs sont colinéaires, donc (BC) et (E′D′) sont parallèles.

108. Homothétie (1)

1.



2. $\overrightarrow{CA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

3. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}$

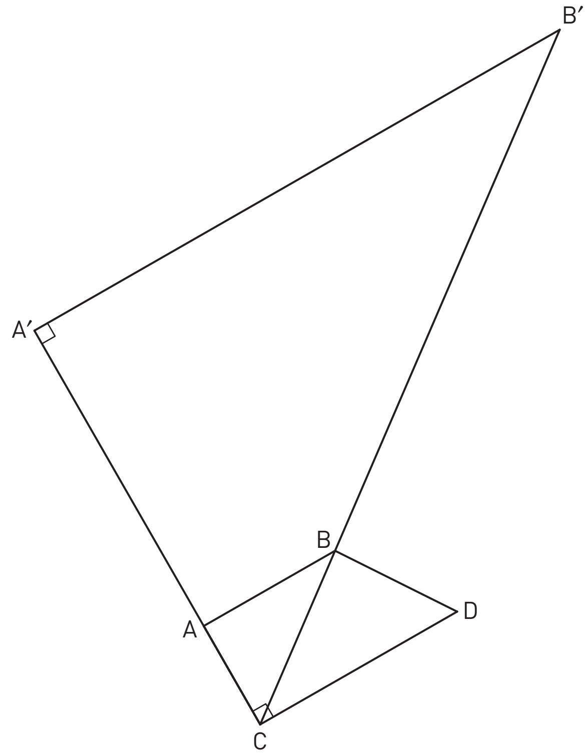
$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$= -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc les vecteurs sont colinéaires donc les droites sont parallèles.

109. Homothétie (2)

1. Avec CD = 6, on a :



2. Par construction, on sait que $\overrightarrow{CA'} = 4\overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{CB'} = 4\overrightarrow{CB}$. Donc :

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} = 4\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}$

$= 4(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = 4\overrightarrow{AB}$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les droites (A′B′) et (AB) sont parallèles donc ABB′A′ est un trapèze.

3. $\mathcal{A}_{ABDC} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(4+6)\times 3}{2} = 15\,\text{cm}^2$

$\mathcal{A}_{ABB'A'} = \frac{(B'+b')\times h'}{2} = \frac{(4+16)\times 9}{2} = 90\,\text{cm}^2$

Vers la 1re

110. D'après la figure, on a : $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

A. Méthode géométrique

1. a) $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

3. $\frac{5}{9}\overrightarrow{RT} = \frac{5}{9} \times \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$

Donc les points R, S et T sont alignés.

B. Méthode analytique

1. A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), S$\left(0 ; \frac{1}{3}\right)$ et R$\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$

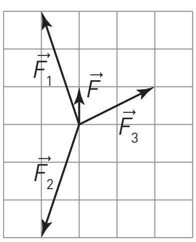
2. T$\left(\frac{2}{5} ; \frac{3}{5}\right)$

3. $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} - 0 \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{SR}, \overrightarrow{ST}) = 0$ donc les vecteurs sont colinéaires.

5. On en déduit que les points R, S et T sont alignés.

111. En additionnant les trois vecteurs forces, on obtient un vecteur non nul dirigé vers le haut, donc l'objet n'est pas en équilibre et il se déplacera vers le haut.



Travaux pratiques p. 158-159

TP1. Coordonnées de points ou de vecteurs?

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Lire, comparer, modifier puis exécuter des programmes écrit en langage Python en veillant à bien distinguer les coordonnées de points et de vecteurs.

A. ▶ Test d'un programme

1. Affichage :

```
1.0
-5.0
```

2. Si `xA, yA, xB` et `yB` sont les coordonnées de deux points A et B alors l'affichage de ce programme représente les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

B. ▶ Comparaison de deux programmes

1. Elles représentent les coordonnées de deux vecteurs.

2. Dans le **programme 2**, l'utilisateur donne les coordonnées de deux vecteurs alors que dans le **programme 3**, l'utilisateur donne les coordonnées de 4 points.

3.

Programme 4

```
def egalitevect3(xu,yu,xA,yA,xB,yB):
    x1=xB-xA
    y1=yB-yA
    if x1==xu and y1==yu:
        print("Les vecteurs sont égaux")
    else:
        print("Les vecteurs ne sont pas égaux")
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
xu=float(input("xu=?"))
yu=float(input("yu=?"))
egalitevect3(xu,yu,xA,yA,xB,yB)
```

4. Non, cette fonction n'est pas correcte car elle mélange les abscisses et les ordonnées. La fonction correcte est :

```
def egalitevect3(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):
    egalitevect(xB-xA,yB-yA,xD-xC,yD-yC)
```

5. a) Les vecteurs ne sont pas égaux.

b) Les vecteurs ne sont pas égaux.

c) Les vecteurs sont égaux.

TP2. Les transformations conservent-elles certaines propriétés

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Observer les effets de transformations sur une configuration plane puis étudier la définition vectorielle des homothéties.

A. ▶ Étude de la conservation du parallélisme, de l'alignement et des longueurs

1. Voir figure en bas de page.

2. Deux segments parallèles : [AE] et [BC], 3 points alignés : A, E et K, des côtés égaux : AE = BC.

3.

	...le parallélisme	**...l'alignement**	**...les longueurs**
La symétrie de centre C conserve ...	Oui	Oui	Oui
La translation de vecteur $\vec{u}$ conserve...	Oui	Oui	Oui
L'homothétie de centre M et de rapport 2	Oui	Oui	Non

B. ▶ L'homothétie conserve-t-elles les alignements?

1. $\overrightarrow{ME'} = 2\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MK'} = 2\overrightarrow{MK}$.

Donc $\overrightarrow{A'E'} = 2\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{A'K'} = 2\overrightarrow{AK}$.

2. $\overrightarrow{A'K'} = 2\overrightarrow{AK} = 2k\overrightarrow{AE} = k \times 2\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{A'E'}$ donc A′, E′ et K′ sont alignés.

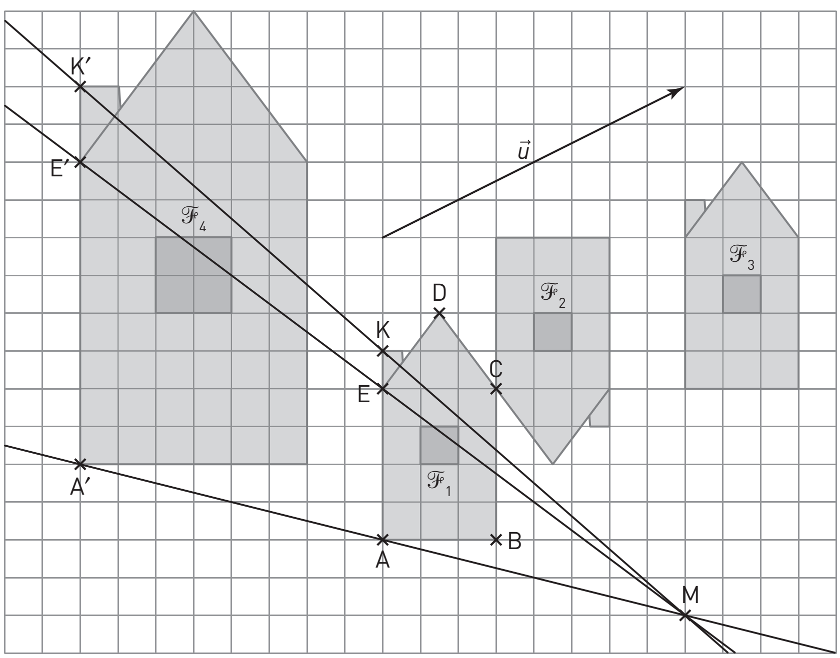
	Bonnes réponses	**Explication des erreurs**	
112	**b) c)**	**a) d)** Attention au sens des vecteurs.	
113	**b) c)**	**a)** $\overrightarrow{KL}$ par la relation de Chasles.	**d)** Attention au sens des vecteurs.

En autonomie p. 160

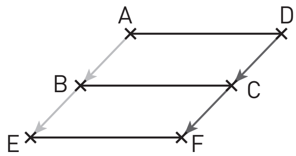
Démontrer avec des égalités de vecteurs

112. b et **c**

113. b et **c**



114. 1.



2. ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On sait que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ donc BEFC est un parallélogramme.

D'autre part, ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

BEFC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$. On en déduit que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ donc AEFD est un parallélogramme.

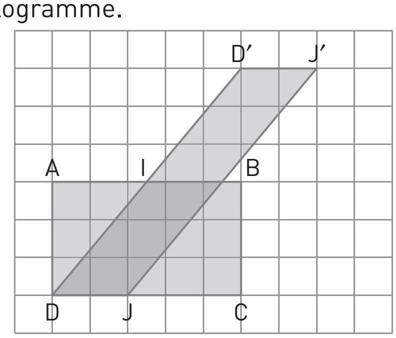
115. ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD] donc $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DJ}$ donc IBJD est un parallélogramme.

On en déduit que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{JB}$.

De plus D′ est le symétrique de D par rapport à I donc $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{ID'}$ et J′ est le symétrique de *J* par rapport à B donc $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{BJ'}$.

On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{JJ'}$ donc D′DJJ′ est un parallélogramme.



Construire la somme et la différence de deux vecteurs

116. c

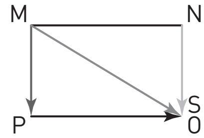
117. a b et **d**

118. $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

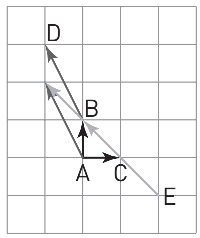
$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

119. $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{MO}$

Donc les points O et S sont confondus.



120.

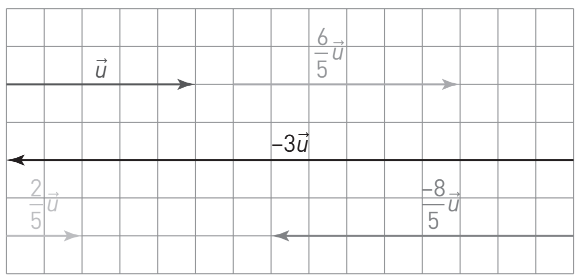


Construire le produit d'un vecteur par un réel

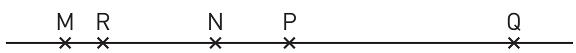
121. c

122. c

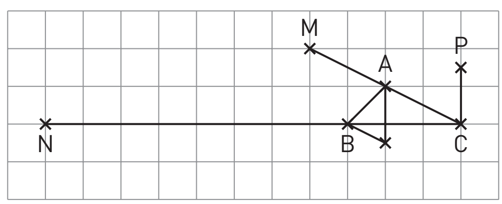
123.



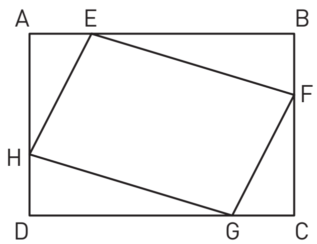
124.



125.



126.



Le quadrilatère EFGH semble être un parallélogramme.

Calculer avec des coordonnées

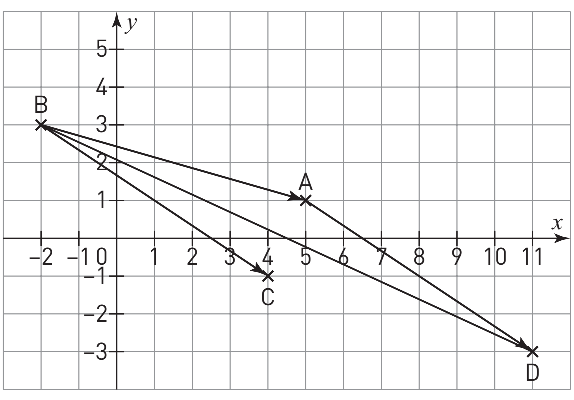
127. b **128. d**

129. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$,

$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

130. 1. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x_D - 5 = 6 \\ y_D - 1 = -4 \end{cases}$ donc D(11 ; −3).



131.

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} x_Q - 6 = 1 \\ y_Q - 1 = -8 \end{cases}$ donc Q(7 ; −7).

Utiliser la colinéarité de vecteurs

132. b c **133. b** **134. b**

135. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 18 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 42 \\ -24 \end{pmatrix}$,

$\det(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = -432 + 420 = -12 \neq 0$.

Les points D, E et F ne sont pas alignés.

136. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

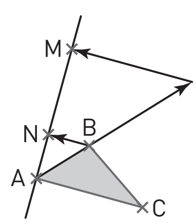
137. 1. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires donc DEFG est un trapèze.

2. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (EF) et (DG) ne sont pas parallèles.

138 1. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix} 1 \\ x-2 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, si et seulement si $(x-2)^2 - 1^2 = 0$, si et seulement si $(x-2)^2 = 1$, si et seulement si $x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1$, si et seulement si $x = 3$ ou $x = 1$.

139.



$\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AN}$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc les points A, M et N sont alignés.

CHAPITRE 7 Droites du plan et systèmes d'équations

Manuel p. 162-185

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est constitué de deux parties.

Équations de droites : on va étudier les équations cartésiennes à partir des vecteurs mais également les équations réduites à partir du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine. Il s'agit d'être capable de lire graphiquement mais également de déterminer par le calcul une équation cartésienne ou une équation réduite de droite.

Résolution de système d'équations à deux inconnues : en s'appuyant sur l'étude des intersections de droites et donc la détermination par le calcul les coordonnées des points d'intersection éventuels, on introduit différentes méthodes de résolution d'un système de deux équations à deux inconnues. La résolution de système peut aussi se présenter de manière indépendante si on le souhaite.

À noter que les **équations à deux inconnues** sont présentées **en exercices** dans le **chapitre 4**.

Capacités

- → **Représenter une droite donnée par son équation cartésienne ou réduite**
- → **Déterminer une équation cartésienne ou réduite d'une droite par le calcul**
- → **Déterminer le coefficient directeur d'une droite par le calcul ou graphiquement**
- → **Déterminer si deux droites sont parallèles ou non**
- → **Résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 163

1. Calculer des coordonnées de vecteurs

1. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont égaux donc ADBC est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DB}$ donc ACEF et BDFE sont des trapèzes.

2. Déterminer les coordonnées de points d'intersection

1. Le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses a pour coordonnées (4 ; 0).

Le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées (0 ; 2).

2. (0 ; 0) (2 ; 1) et (6 ; 3)

3. Le point de coordonnées (2 ; 1).

3. Compléter un tableau de valeurs

On obtient le tableau complété suivant.

x	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$
y	-4	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$

4. Identifier des droites particulières

1. La droite est horizontale.

2. La droite a pour équation $y = x$.

3. La droite est verticale.

5. Alignement

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ donc les points A, B et C sont alignés.

6. Parallélisme

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ donc les droites sont parallèles.

Activités p. 164-165

Activité 1. Effectuer des paramétrages sur une droite

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir le paramétrage sur une droite.

2. Pour $k = 0$

3. Pour $k = 1$

4. Pour $k = 0{,}5$

5. Sur le segment [AB]

6. Pour $k = -1$

7. Les points sont sur la même droite (AB).

8. Pour $h = 2$, N est en A ; pour h = 0, N est en B ; pour $h = 1$, N est en C et pour $h = 4$, N est en D.

Activité 2. Étudier les positions relatives de droites

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les positions entre deux droites.

Dans tous les cas, le quotient vaut $\frac{2}{3}$.

Activité 3. Trapèze complet

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir une configuration particulière.

Dans tous les cas, on remarque que les points E, F, G et H sont alignés.

Activité 4. Résoudre un système par combinaison

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir une méthode de résolution d'un système.

2. Graphiquement les droites semblent se couper au point (5 ; 4).

3. Ces coordonnées ne vérifient pas les équations mais presque.

4. a) On a multiplié la première ligne par 3 et la deuxième par -4. L'avantage est que l'inconnue x va disparaître par addition des deux lignes.

b) On en déduit $-10y + 39 = 0$,

d'où $y = 3{,}9$.

c) On remplace ce qui donne alors :

$20x + 30 \times 3{,}9 - 219 = 0$ d'où $20x = 102$ et $x = 5{,}1$.

5. On multiplie la première ligne par 5 et la deuxième par -6 ce qui donne :

$$\begin{cases} 100x + 150y - 1095 = 0 \\ -90x - 150y + 1044 = 0 \end{cases}$$

Par addition $10x - 51 = 0$ qui donne encore $x = 5{,}1$.

Activité 5. Mettre un problème en équation et résoudre un système par substitution

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir une méthode de résolution d'un système.

1. $2x + 3y = 10{,}10$

2. $3x + y = 7{,}10$

3. On a bien ce système.

4. La deuxième ligne donne $y = -3x + 7{,}10$.

5. On remplace dans la première ligne, ce qui donne $2x + 3(-3x + 7{,}1) - 10{,}1 = 0$.

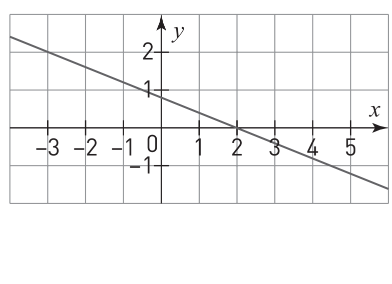
6. Alors $-7x + 21{,}3 - 10{,}1 = 0$ soit $-7x = -11{,}2$ et donc $x = 1{,}6$ euro.

7. D'où $y = -3 \times 1{,}6 + 7{,}1 = 2{,}3$ euros.

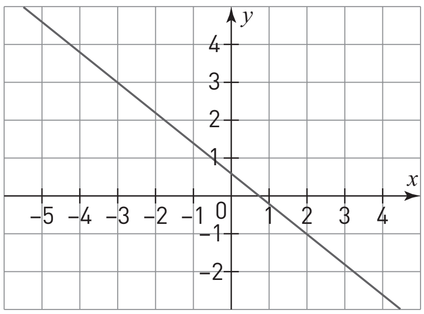
8. Un café coûte 1,60 euro et un chocolat coûte 2,30 euros.

À vous de jouer ! p. 170-173

1.



2.



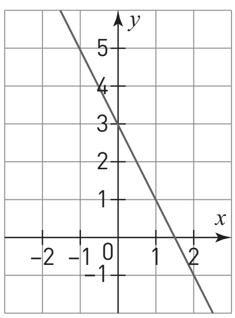
3. $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) - 2(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2y - 7 = 0$

4. Une équation cartésienne de la droite (AB) est :

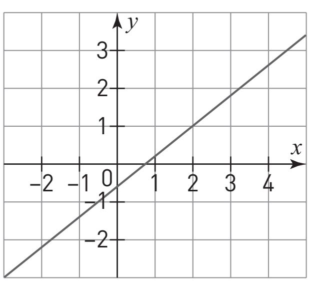
$3x - 2y + 5 = 0$

5.



6. 1. Son coefficient directeur est $\frac{4}{5}$ et son ordonnée à l'origine est $-\frac{3}{5}$.

2.



7. 1. $m = 2$

2. $p = -1$

3. $y = 2x - 1$

8. 1. Sur la droite d_1 : (0 ; 1) et (6 ; 3)

Sur la droite d_2 : (0 ; 3) et (5 ; − 1)

Sur la droite d_3 : (3 ; 0) et (3 ; 1)

2. Pour d_1 : $y = \frac{1}{3}x + 1$

Pour d_2 : $y = -\frac{5}{4}x + 3$ et pour d_3 : $x = 3$

9. $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-3)}{1-(-2)} = \frac{5}{3}$

10. La droite (EF) : $y = -2x$

11. 1. $p = 3$

2. $m = \frac{5}{2}$

3. $y = \frac{5}{2}x + 3$

12. Elles sont strictement parallèles.

13. Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$ et les droites sont parallèles.

14. On extrait x de la deuxième équation.

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y + 2 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(2y+3) + 3y + 2 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4y - 6 + 3y + 2 = 0 \\ x = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 6 - 2 \\ x = 2y + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 2 \times (-4) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = -5 \end{cases}$$

La solution est le couple (− 5;− 4).

15. $\begin{cases} -3x - 2y - 2 = 0 \\ 4x + y + 5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x - 2(-4x - 5) - 2 = 0 \\ y = -4x - 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 8 = 0 \\ y = -4x - 5 \end{cases}$

Donc la solution est $\left(-\dfrac{8}{5}\ ;\ \dfrac{7}{5}\right)$.

16. On multiplie la deuxième équation par -2.

17. Pour éliminer x il faut multiplier la première équation par 4 et la deuxième par 3 ce qui donne :

$\begin{cases} -12x - 8y - 8 = 0 \\ -12x + 15y - 3 = 0 \end{cases}$

Pour éliminer y il faut multiplier la première équation par 5 et la deuxième par 2 ce qui donne :

$\begin{cases} -15x - 10y - 10 = 0 \\ 8x + 10y - 2 = 0 \end{cases}$

Donc la solution est $\left(-\dfrac{12}{7}\ ;\ \dfrac{11}{7}\right)$.

Exercices d'application p. 174-176

Apprendre à apprendre

18. a

Questions – Flash

19. 1. a) Si $x = -1$ alors $y = -2(-1) + 3 = 5$.

b) Si $x = \dfrac{5}{2}$ alors $y = -2 \times \dfrac{5}{2} + 3 = -5 + 3 = -2$.

2. a) Si $y = 2$ alors $2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

b) Si $y = \dfrac{1}{3}$ alors $\dfrac{1}{3} = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.

20. 1. Si $x = 4$ alors $2 \times 4 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -6$.

2. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

21. 1. Si $y = -3$ alors $-2x + 3(-3) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

2. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

22. 1. $-\dfrac{3}{5}(-5) + 2 + 1 \neq 0$ donc le couple ne vérifie pas l'équation.

2. $-\dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} + 1 = 0$ donc le point appartient à la droite.

23. 1. $2x - 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow 5y = 2x - 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{1}{5}$

2. $2x - 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5y + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}y + \dfrac{1}{2}$

24. a) C'est une droite.

b) Ce n'est pas une droite (c'est une hyperbole).

c) Ce n'est pas une droite (c'est une parabole).

d) C'est une droite car :

$(x - 2)^2 - x^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - x^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow -4x - y + 4 = 0$

25. a) Oui

b) Non

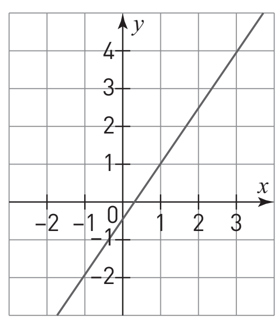
c) Non

26. 1. Son coefficient directeur est : $m = -\dfrac{3}{4}$.

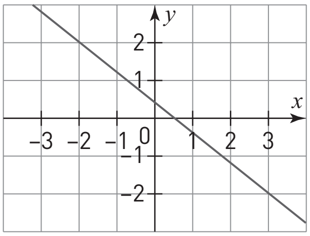
2. Son ordonnée à l'origine est $p = \dfrac{2}{5}$.

Représenter une droite donnée par une équation cartésienne

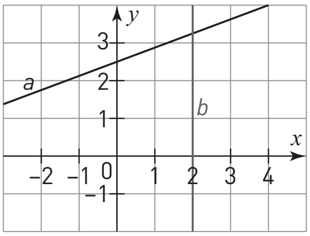
27.



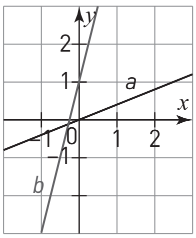
28.



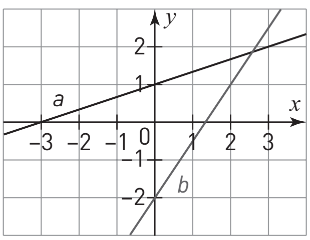
29.



30.



31.



Déterminer une équation cartésienne d'une droite par le calcul

32. $2x - 3y + 7 = 0$

33. (AB) : $4x + 3y + 5 = 0$

34. (CD) : $7x + 3y + 15 = 0$

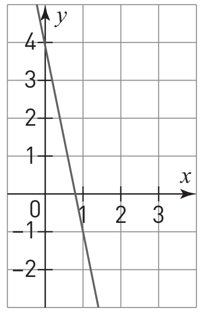
35. d : $-2x - 3y = 0$

36. (MN) : $y - 3 = 0$

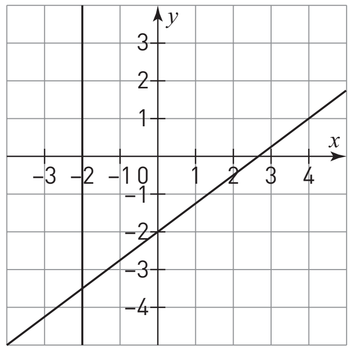
37. (FG) : $x - 1 = 0$

Représenter graphiquement une droite donnée par son équation réduite

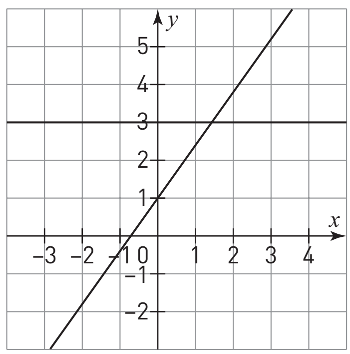
38.



39.



40.



Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite

41. Pour d_1 : $m_1 = -\frac{1}{2}$, pour d_2 : $m_2 = 3$, pour d_3 : $m_3 = 6$, pour d_4 : $m_4 = 0$.

42. $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3$, $m_3 = 6$, $m_4 = 0$

Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

43. Pour $d_1 : y = -\frac{1}{3}x + 1$, pour $d_2 : y = \frac{3}{2}x - 2$, pour $d_3 : y = -2x + 3$.

44. $d_1 : y = \frac{5}{3}x - 2$, $d_2 : y = \frac{2}{3}x + 2$

$d_3 : y = -\frac{1}{4}x + 3$, $d_4 : \mathrm{y} = -1$

Calculer le coefficient directeur d'une droite

45. $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-1}{4-(-2)} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

46. $m = -\frac{1}{2}$

47. $m = -\frac{7}{3}$

Déterminer l'équation réduite d'une droite par le calcul

48. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$

49. (KL) : $x = -2$

50. $d : y = \frac{4}{5}x + \frac{28}{5}$

51. $d : y = -3x + 9$

Déterminer la position relative de droites données par leurs équations cartésiennes

52. 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

2. $\det(\vec{u},\vec{v}) = 9 - (-10) \neq 0$ donc les droites sont sécantes.

53. 1. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

2. $\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = 6$ donc les droites sont sécantes.

54. 1. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

2. $\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = 10$ donc les droites sont sécantes.

55. 1. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

2. $\det(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = 0$ donc les droites sont parallèles (elles sont même confondues).

Résoudre un système par la méthode de substitution

56. $\left(-\frac{2}{5} ; \frac{1}{5}\right)$

57. $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y - 4 \\ 2(3y - 4) - 5y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y - 4 \\ y - 7 = 0 \end{cases}$

Donc la solution est (17 ; 7).

58. $\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ 5x + y + 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x + 2(-5x - 2) - 1 = 0 \\ y = -5x - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -13x - 5 = 0 \\ y = -5x - 2 \end{cases}$

Donc la solution est $\left(-\frac{5}{13} ; -\frac{1}{13}\right)$.

59. $\begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 6y - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 3(2y + 3) - 6y - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 0y + 8 = 0 \end{cases}$

Donc il n'y a pas de solution, les droites sont parallèles.

60. $\begin{cases} -x + 5y = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5y \\ 3(5y) - 4y + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5y \\ 11y + 1 = 0 \end{cases}$

Donc la solution est $\left(-\frac{5}{11} ; -\frac{1}{11}\right)$.

61. $\begin{cases} 5x + 3y - 1 = 0 \\ -7x - y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 3(-7x + 3) - 1 = 0 \\ y = -7x + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} -16x + 8 = 0 \\ y = -7x + 3 \end{cases}$

Donc la solution est $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.

Résoudre un système par la méthode de combinaison

62. $(-2 ; -1)$

63. Pour éliminer x on calcule $3L_1 + 2L_2$ et pour éliminer y on calcule $4L_1 + 5L_2$ d'où :

$\begin{cases} (6x - 15y + 3) + (-6x + 8y - 4) = 0 \\ (8x - 20y + 4) + (-15x + 20y - 10) = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} -7y - 1 = 0 \\ -7x - 6 = 0 \end{cases}$ donc $\left(-\frac{1}{7} ; -\frac{6}{7}\right)$.

64. Pour éliminer x on calcule $3L_1 + 4L_2$ et pour éliminer y on calcule $4L_1 + 7L_2$ d'où :

$\begin{cases} (12x - 21y + 3) + (-12x + 16y - 8) = 0 \\ (16x - 28y + 4) + (-21x + 28y - 14) = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} -5y - 5 = 0 \\ -5x - 10 = 0 \end{cases}$ donc $(-2 ; -1)$.

65. Quand on calcule $L_1 + 2L_2$ on obtient $0 = 0$ donc les deux droites sont confondues, le système admet une infinité de solutions.

66. Pour éliminer x on calcule $3L_1 + 2L_2$ et pour éliminer y on calcule $4L_1 + 5L_2$ d'où :

$\begin{cases} (6x - 15y) + (-6x + 8y + 2) = 0 \\ (8x - 20y) + (-15x + 20y + 5) = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} -7y + 2 = 0 \\ -7x + 5 = 0 \end{cases}$ donc $\left(\frac{2}{7} ; \frac{5}{7}\right)$.

67. Pour éliminer x on calcule $7L_1 + 5L_2$ et pour éliminer y on calcule $3L_1 + 2L_2$ d'où :

$\begin{cases} (35x + 21y - 7) + (-35x - 10y + 15) = 0 \\ (10x + 6y - 2) + (-21x - 6y + 9) = 0 \end{cases}$

soit $-\begin{cases} 11y + 8 = 0 \\ -11x + 7 = 0 \end{cases}$ donc $\left(\frac{7}{11} ; -\frac{8}{11}\right)$.

Calculs et automatismes

68. a) 396 **b)** 1 634 **c)** 875 **d)** 361

69. a) $-\frac{4}{5}$ **b)** $-\frac{2}{7}$ **c)** 2 **d)** $\frac{2}{5}$

70. a) 2 **b)** 14 **c)** 10 **d)** 29

Exercices d'entraînement

p. 177-178

Avec des équations de droites ou des vecteurs colinéaires

71. 1. $2x - 6y - 14 = 0$

2. $2 \times 3 - 6 \times (-1) - 14 = -2 \neq 0$.

Le point C n'appartient pas à la droite.

3. $2 \times \dfrac{3}{2} - 6y - 14 = 0 \qquad y = \dfrac{11}{6}$

Le point D a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{11}{6}\right)$.

4. $2x - 6 \times \left(-\dfrac{4}{3}\right) - 14 = 0 \qquad x = 3$

Le point E a pour coordonnées $\left(3 ; -\dfrac{4}{3}\right)$.

72. Avec l'axe des abscisses $\left(\dfrac{4}{9} ; 0\right)$ et avec l'axe des ordonnées $\left(0 ; \dfrac{1}{3}\right)$.

73. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ et donc les droites sont parallèles.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}60\\60\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{CD} = -6\overrightarrow{AB}$ et donc les droites sont parallèles.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}169\\-196\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-90\end{pmatrix}$ alors

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -15\,602 \neq 0$ donc les droites sont sécantes.

74. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ et donc les droites sont parallèles.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}186\\1110\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ alors $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 6 \neq 0$ donc les droites sont sécantes.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$ alors $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = -12 \neq 0$ donc les droites sont sécantes.

d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-20\,783\\-11\,876\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$ alors $\det(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = 0$ donc les droites sont parallèles.

75. L'algorithme calcule le coefficient directeur d'une droite si elle n'est pas verticale et sinon il le signale.

76. L'algorithme calcule a qui est l'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et b qui est l'opposé de son abscisse, puis c qui est le coefficient *c* de l'équation.

77. $d_1 : y = \dfrac{1}{3}x + 2$

$d_2 : y = -\dfrac{1}{2}x - 3$

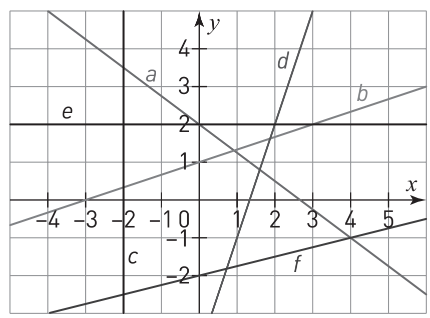
$d_3 : x = -1$

$d_4 : y = -2x + 3$

$d_5 : y = 3$

$d_6 : y = \dfrac{3}{2}x$

78.



Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

79. a) Par combinaison :

$$\begin{cases} (6x - 8y) + (-6x + 15y) = -2 + 6 \\ (15x - 20y) + (-8x + 20y) = -5 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = 4 \\ 7x = 3 \end{cases} \text{ donc } \left(\dfrac{3}{7} ; \dfrac{4}{7}\right).$$

b) Par combinaison :

$$\begin{cases} (4x - 3y) + (-4x + 10y) = -2 - 6 \\ (-20x + 15y) + (6x - 15y) = 10 + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = -8 \\ -14x = 19 \end{cases} \text{ donc } \left(-\dfrac{19}{14} ; -\dfrac{8}{7}\right).$$

c) Par substitution :

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ -2x + 3(3x - 1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 7x = 5 \end{cases} \text{ donc } \left(\frac{5}{7} ; \frac{8}{7}\right).$$

d) On observe en multipliant la première ligne par – 1 qu'on a deux droites parallèles.

80. a) d_1 et d_3 se coupent en (– 1 ; 2).
b) d_2 et d_3 sont parallèles.
c) d_1 et d_2 se coupent en (– 2 ; 0).

81. $d_1 : y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ et $d_2 : y = \frac{1}{4}x + 3$

D'où $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{4}x + 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3y = 2x - 7 \\ 4y = x + 12 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3y = 2(4y - 12) - 7 \\ x = 4y - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y = 8y - 31 \\ x = 4y - 12 \end{cases}$$

Donc $\left(\frac{64}{5} ; \frac{31}{5}\right)$.

82. a) $\begin{cases} (2x - 3y - 1) + (-4x + 3y + 2) = 0 \\ (4x - 6y - 2) + (-4x + 3y + 2) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \text{ donc } \left(\frac{1}{2} ; 0\right).$$

b) $\begin{cases} -3(-3y + 3) + 2y + 1 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 11y - 8 = 0 \\ x = -3y + 3 \end{cases} \text{ donc } \left(\frac{9}{11} ; \frac{8}{11}\right).$$

c) En multipliant la première ligne par −3, on trouve que les droites sont parallèles.

d) En multipliant la première ligne par −3, on trouve que les droites sont confondues.

83. La mise en équation donne $\begin{cases} x - y = 8 \\ x + y = 36 \end{cases}$ donc (22 ; 14).

84. La mise en équation donne $\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ (x + y)(x - y) = 21 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$ donc (5 ;– 2).

85. La mise en équation donne $\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + y = 36 \end{cases}$ donc (16 ; 4). Chloé possède 16 pièces de 2 euros et 4 pièces d'un euro.

86. La mise en équation donne

$$\begin{cases} 2166x + 4691y = 3020{,}55 \\ 2484x + 1629y = 1551{,}15 \end{cases}$$

Ce qui donne $x = 0{,}29$ et $y = 0{,}51$.

Travailler autrement

87. Le point M forme avec le point A et le point N d'intersection de la perpendiculaire à (AM) passant par M et du segment [BC] un triangle AMN rectangle en M. Son hypoténuse [AN] a une longueur qui varie de AB à AC. Donc le point M est à l'intérieur des cercles de diamètre [AB] et [AC] mais ne peut pas être dans les deux cercles en même temps.

88. 1. Impossible car la seule solution est $a = b = 2$.
2. Une seule solution : 2, 3, et 6.
3. Deux solutions : 4, 6, 12 et 2 ou 2, 3, 7 et 42.

89. On trace les parallèles aux deux droites passant par le point M. Chacune coupe une des deux droites ce qui donne deux points A et B et on place le milieu du segment [AB]. Alors le point d'intersection cherché est le symétrique de M par rapport à ce milieu car on a construit un parallélogramme.

Exercices bilan p. 179

90. Théorème de Pappus

1. B(1 ; 1), C(4 ; 4), E(4 ;– 3) et F(7 ; – 3)

(BF) : $-4x - 6y + 10 = 0$ et (CE) : $x = 4$

2. M(4 ;– 1)

3. A(0 ; 0) et D(1 ; – 3)

(AF) : $-3x - 7y = 0$ et

(CD) : $-7x + 3y + 16 = 0$

4. $\begin{cases} 3x + 7y = 0 \\ -7x + 3y + 16 = 0 \end{cases}$ donne

$$\begin{cases} (21x + 49y) + (-21x + 9y + 48) = 0 \\ (-9x - 21y) + (-49x + 21y + 112) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 58y + 48 = 0 \\ -58x + 112 = 0 \end{cases}$ donc $N\left(\frac{56}{29} ; -\frac{24}{29}\right)$.

5. (AE) : $-3x - 4y = 0$ et (BD) : $x = 1$

6. $P\left(1 ; -\frac{3}{4}\right)$

7. La droite (MP) : $\frac{1}{4}x + 3y + 2 = 0$

et alors on calcule :

$\frac{1}{4} \times \frac{56}{29} + 3 \times \left(-\frac{24}{29}\right) + 2 = 0$ qui montre que N appartient à la droite (MP).

91. 1. (AB) : $-3x - 12y + 51 = 0$

2. $-3 \times 2 - 12 \times 0 + 51 \neq 0$ donc C n'appartient pas à (AB).

3. d : $y = \frac{7}{2}x - 7$ ou $7x - 2y - 14 = 0$

4. $\begin{cases} -3x - 12y + 51 = 0 \\ 7x - 2y - 14 = 0 \end{cases}$ qui donne

$$\begin{cases} (-3x - 12y + 51) + (-42x + 12y + 84) = 0 \\ (-21x - 84y + 357) + (21x - 6y - 42) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} -45x + 135 = 0 \\ -90y + 315 = 0 \end{cases}$ donc $M\left(3 ; \frac{7}{2}\right)$.

5. $\begin{cases} -3x - 12y + 51 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $x_p = 17$

92. Carrés

Dans le repère A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1) C(1 ; 1), E(a+1 ; 0), F(a+1 ; a) et G(1 ; a)

1. (CE) : $-x - ay + a + 1 = 0$

(DF) : $(a - 1)x - (a + 1)y + a + 1 = 0$

(AG) : $ax - y = 0$

2. L'intersection de (CE) et (AG) est :

$$\begin{cases} -x - ay + a + 1 = 0 \\ ax - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - a^2x + a + 1 = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

Donc le point $K\left(\frac{a+1}{a^2+1} ; \frac{a(a+1)}{a^2+1}\right)$.

Vérifions dans l'équation de (DF) :

$$(a-1)\frac{a+1}{a^2+1} - (a+1)\frac{a(a+1)}{a^2+1} + a + 1$$

$$= \frac{a^2 - 1 - a(a+1)^2 + (a+1)(a^2+1)}{a^2+1}$$

$= \frac{a^2 - 1 - a(a^2 + 2a + 1) + a^3 + a^2 + a + 1}{a^2+1} = 0$ donc les droites sont concourantes.

93. Les longueurs des côtés d'un triangle

1. $ab = 2 \times 8,64 = 17,28$

2. $a^2 + b^2 = 6^2 = 36$

3. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= 36 + 2 \times 17,28 = 70,56$

Et $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$= 36 - 2 \times 17,28 = 1,44$

4. D'où $a + b = 8,4$ et $a - b = 1,2$

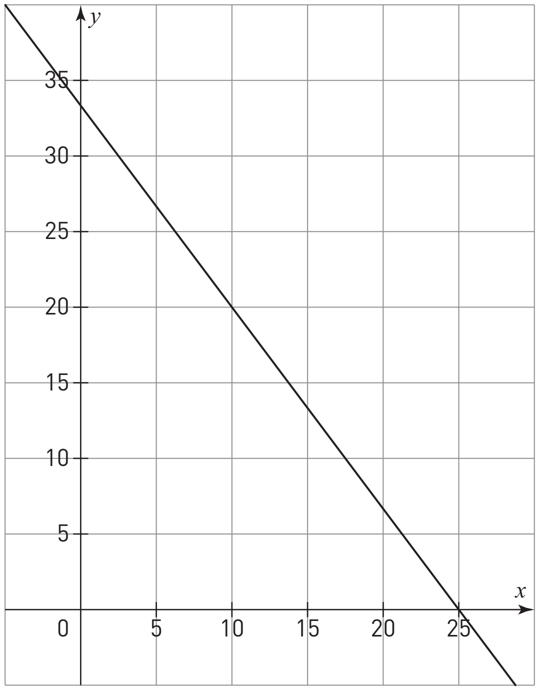
5. Donc $a = 4,8$ et $b = 3,6$

94. Spectacles

A. 1. $16x + 12y = 400$

2. Si $x = y$ l'équation donne $28x = 400$ qui ne donne pas une solution entière.

3.



4. Les solutions entières sachant que $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 40$ sont :

(1 ; 32), (4 ; 28), (7 ; 24), (10 ; 20), (13 ; 16), (16 ; 12) et (19 ; 8).

5. On peut choisir 13 concerts et 16 spectacles de ballet.

B. 1. Ici il faudrait tracer $y = 2x$.

2. Il n'y a plus qu'une solution possible : 10 concerts et 20 ballets.

95. Soldes

La traduction de l'énoncé donne le système $\begin{cases} 2x + y = 120 \\ 6 \times 0{,}5x + 2 \times 0{,}7y = 174 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} 2x + y = 120 \\ 3x + 1{,}4y = 174 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} y = -2x + 120 \\ 3x + 1{,}4(-2x + 120) = 174 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x + 120 \\ 0{,}2x + 168 = 174 \end{cases}$

donc $x = 30$ euros et $y = 60$ euros.

Par conséquent sans les remises il aurait payé $6 \times 30 + 2 \times 60 = 300$ euros donc il a économisé 126 euros.

96. Perdu dans le désert

La traduction de l'énoncé donne le système : $\begin{cases} (v + 20)(t - 2) = d \\ (v - 20)(t + 3) = d \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} vt + 20t - 2v - 40 = d \\ vt - 20t + 3v - 60 = d \end{cases}$ ou encore

$\begin{cases} 20t - 2v - 40 = 0 \\ -20t + 3v - 60 = 0 \end{cases}$ qui donne que $v = 100$ et $t = 12$ et par conséquent la distance est $d = 100 \times \dfrac{12}{60} = 20$ km.

Exercices d'approfondissement p. 180-181

97. Mobile ou immobile ?

1. On conjecture que le point M ne varie pas quand C varie.

2. On considère le repère (A ; B, J) qui donne les coordonnées A(0 ; 0), B(1 ; 0), J(0 ; 1), C(0 ; a), C′(0 ; $-6a$), $\text{K}\left(\dfrac{1}{2}; -3a\right)$ donc l'équation de (AB) est $y = 0$ et de (CK) est $-4ax - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}a = 0$ dont l'intersection est solution du système $\begin{cases} -4ax - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}a = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

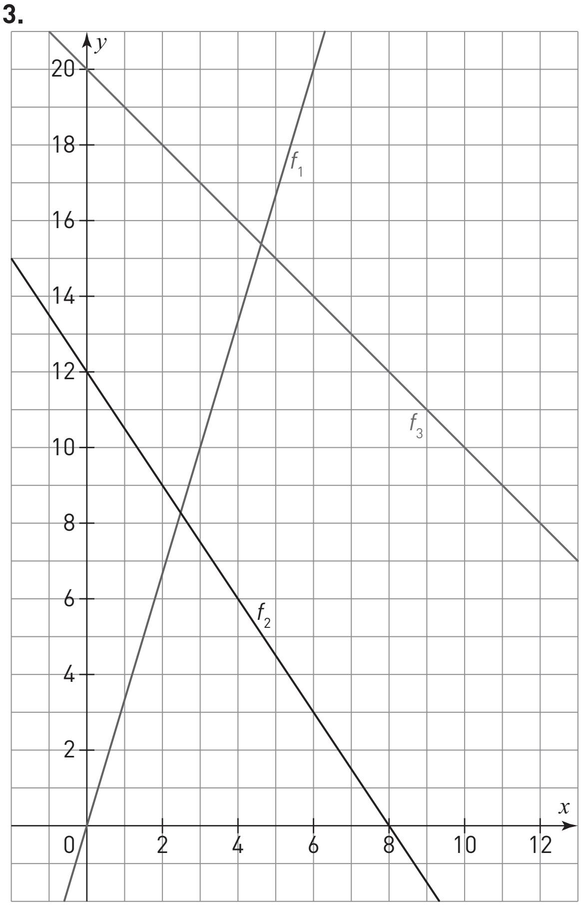
Donc $\text{M}\left(\dfrac{1}{8}; 0\right)$ qui ne dépend pas de a donc M est bien invariant.

98. Histoire d'aires

1. Aire de AMD $= \dfrac{\text{AM} \times \text{AD}}{2} = \dfrac{5x}{2}$ et aire de MBC $= \dfrac{\text{BM} \times \text{BC}}{2} = \dfrac{3(8 - x)}{2}$.

2. Aire de ABCD $= \dfrac{\text{AB(BC + AD)}}{2} = 32$ donc on déduit par différence que l'aire de DMC est égale à $32 - \dfrac{5x}{2} - \dfrac{3(8 - x)}{2} = 20 - x$.

3.



4. Les aires AMD et DMC sont égales quand $f_1(x) = f_3(x)$ soit pour $x \approx 5,7$.

Les aires AMD et MBC sont égales quand $f_1(x) = f_2(x)$ soit pour $x \approx 3$.

Les aires DMC et MBC sont égales quand $f_3(x) = f_2(x)$ ce qui est impossible.

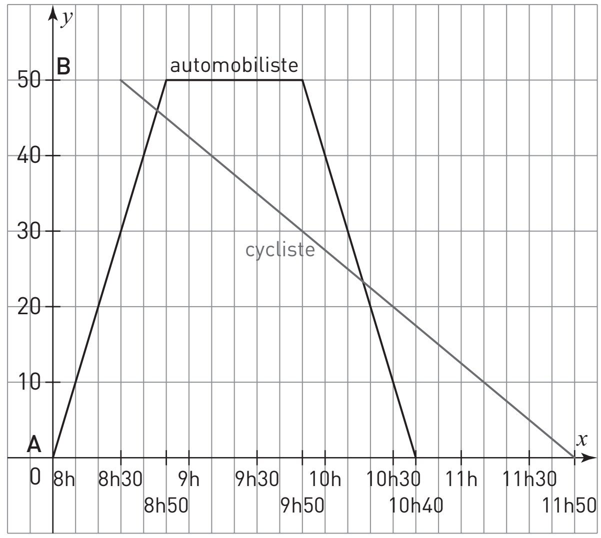
5. Pour AMD et DMC : $\frac{5x}{2} = 20 - x$ d'où $5x = 40 - 2x$ donc $x = \frac{40}{7}$.

Pour AMD et MBC : $\frac{5x}{2} = \frac{3(8-x)}{2}$ d'où $5x = 24 - 3x$ donc $x = 3$.

Pour DMC et MBC : $20 - x = \frac{3(8-x)}{2}$ d'où $40 - 2x = 24 - 3x$ donc $x = -16$ donc impossible.

99. L'automobiliste et le cycliste

A. 1. 2.



3. Graphiquement ils se croisent vers 8 h 45 à 45 km de A et vers 10 h 15 à 23 km de A.

B. 1. Pour l'automobiliste on a successivement : $y = 60x$, $y = 50$ et $y = -60x + 160$ avec x qui débute à 8 h.

Pour le cycliste on a : $y = -15x + 57,5$.

2. La première intersection pour :

$$\begin{cases} y = 60x \\ y = -15x + 57,5 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} y = 60x \\ 60x = -15x + 57,5 \end{cases}$$

d'où $x = \frac{23}{30}$ et $y = 46$, donc à 46 km de A à 8 h 46.

La deuxième intersection pour :

$$\begin{cases} y = -60x + 160 \\ y = -15x + 57,5 \end{cases} \text{soit} \begin{cases} y = -60x + 160 \\ -60x + 160 = -15x + 57,5 \end{cases}$$

d'où $x = \frac{41}{18}$ et $y = \frac{70}{3}$ donc à environ 23,3 km de A vers 10 h 16.

100. Tangente à un cercle

1. On projette M sur l'axe des abscisses en P et dans le triangle OMP on a bien $a^2 + b^2 = 1$.

2. Dans les triangles OMH et OMP on a :

$\cos\widehat{MOH} = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OM}$ soit $\frac{1}{OH} = \frac{OP}{1}$.

Donc $OH = \frac{1}{OP} = \frac{1}{a}$.

3. Dans les triangles OMK et OMQ on a : $\cos\widehat{MOK} = \dfrac{OM}{OK} = \dfrac{OQ}{OM}$ soit $\dfrac{1}{OK} = \dfrac{OQ}{1}$.

Donc $OK = \dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{b}$ avec Q projeté de M sur l'axe des ordonnées.

4. L'équation réduite de la droite (HK) est : $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{1}{b}$

101. Terrain carré

On appelle x le côté du carré extérieur et y celui du carré intérieur on a donc : $\begin{cases} 4x - 4y = 32 \\ x^2 - y^2 = 464 \end{cases}$ qui donne

$\begin{cases} x - y = 8 \\ (x+y)(x-y) = 464 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x - y = 8 \\ x + y = 58 \end{cases}$

Donc $x = 33$ et $y = 25$ et la surface totale du jardin est de $33^2 = 1\,089$ mètres carrés.

102. Baleines en promenade

La baleine qui ne change pas de direction parcourt entre 9 h 15 et 10 h la distance de $8 \times \dfrac{45}{60} = 6$ km.

L'autre baleine pendant le même temps aura parcouru $10 \times \dfrac{45}{60} = 7{,}5$ km.

On en déduit donc que la baleine plus rapide aura parcouru $2 \times 1{,}5 = 3$ km avant de faire son demi-tour qui s'est donc produit au bout de $\dfrac{3}{10}$ d'heure soit 18 minutes et donc la baleine la plus rapide a fait son demi-tour à 9 h 33.

103. Coefficient directeur et vitesse

On donne les coefficients directeurs de chaque segment : $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = \dfrac{3}{2}$, $m_3 = \dfrac{1}{3}$, $m_4 = 1$, $m_5 = \dfrac{3}{4}$ et par conséquent : $m_2 > m_4 > m_5 > m_1 > m_3$.

Vers la 1re

104. 1. On appelle H et K les projetés orthogonaux de M sur [AB] et [BC].

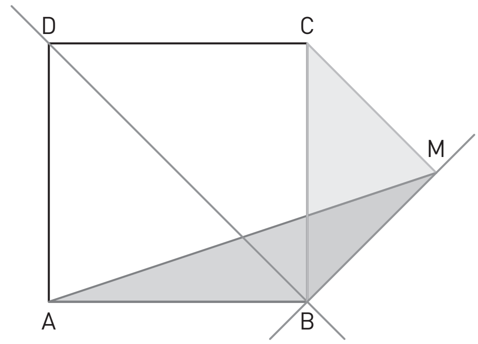
Alors les aires des triangles sont égales si $\dfrac{AB \times MH}{2} = \dfrac{BC \times MK}{2}$ soit si MH = MK donc si M est sur le segment [BD].

2. a) De même on doit avoir MH = MK et avec les coordonnées cela donne :

$\sqrt{y^2} = \sqrt{(x-1)^2}$ mais comme x peut être plus petit ou plus grand que 1 alors cela donne $y^2 = (x-1)^2$.

b) Cette égalité donne selon les deux cas $y = x - 1$ ou $y = 1 - x$ qui sont donc deux droites.

c)



105. 1. $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ et $B\left(b\,;\dfrac{1}{b}\right)$ d'où l'équation réduite $y = -\dfrac{1}{ab}x + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

2. Avec l'axe des ordonnées on obtient le point $\left(0\,;\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ et avec l'axe des abscisses le point $(a + b\,;0)$.

106. 1. On a $\begin{cases} 2X - y = 3 \\ -3X + 2y = -5 \end{cases}$ qui donne donc $X = 1$ et $y = -1$.

2. D'où les solutions $(1\,;-1)$ et $(-1\,;-1)$.

3. On a $\begin{cases} y = 2x^2 - 3 \\ y = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{5}{2} \end{cases}$ on obtient les équations de deux paraboles qui se coupent donc en deux points.

3. On pose $X = \dfrac{1}{x}$ ce qui donne $\begin{cases} 3X - 2y = 1 \\ -2X + 3y = 1 \end{cases}$ d'où $X = 1$ et $y = 1$ et donc une solution $(1\,;1)$.

On isole y ce qui donne $\begin{cases} y = \dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ qui montre que ce point est l'intersection de deux hyperboles.

107. On se place dans le repère (A ; B, D).

Alors D(0 ; 1), $E\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

Puis $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et alors

$$\det(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}) = -\frac{1}{4} - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} - 1\right) = 0$$

donc les points sont alignés.

108. A. 1. M(2 + t ; 1 + t)

2. N(1 + 2t ; 3 + t)

3. M et N sont confondus si $\begin{cases} 2+t = 1+2t \\ 1+t = 3+t \end{cases}$, ce qui est impossible.

4. On en déduit qu'il n'y aura pas de collision des deux particules.

B. 1. M(5 + t ; 4 + 2t), N(− 1 + 3t ; 7 + t)

qui sont confondus si $\begin{cases} 5+t = -1+3t \\ 4+2t = 7+t \end{cases}$ qui a pour solution $t = 3$, donc il y aura une collision.

2. Celle-ci aura lieu au point (8 ; 10).

C. 1. Si M et N sont confondus alors on a $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}_A$ et $\overrightarrow{BM} = t\vec{v}_B$ qui par soustraction donne $\overrightarrow{AB} = t(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$.

2. Dans le premier cas $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_A - \vec{v}_B\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc le critère montre que M et N ne peuvent pas être confondus.

Dans le deuxième cas $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_A - \vec{v}_B\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le critère montre une solution pour $t = 3$.

Travaux pratiques p. 182-183

TP 1. Équation diophantienne

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Chercher des solutions à coordonnées entières dans une équation linéaire à deux inconnues.

1. a) $3y = 2x - 4$ le membre de droite étant pair celui de gauche doit l'être également et donc y doit être pair.

b) (2 ; 0), (5 ; 2), (8 ; 4)

2. a) Il faut choisir x multiple de 3.

b) (3 ; 0) ; (6 ; 1), (9 ; 2)

3. a) Non à cause de la deuxième fraction.

b) Il faut que x + 2 soit multiple de 3.

c) (1 ; 1), (4 ; 2), (7 ; 3)

4. Non, il n'y a aucun point à coordonnées entières sur cette droite.

TP 2. Le crible de Iouri Matiassevitch

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir une belle construction des nombres premiers.

A. La construction permet de conjecturer que les seules ordonnées non atteintes sont celles de nombres premiers et qu'on obtient des produits dépendants des abscisses des deux points choisis.

B. 1. A(2 ; 4) et B(− 6 ; 36)

2. (AB) : $y = -4x + 12$

3. L'ordonnée à l'origine est 12.

4. Oui car $2 \times 6 = 12$.

C. 1. A(a ; a^2) et B(b ; b^2)

2. (AB) : $y = (a + b)x - ab$

3. Son ordonnée à l'origine est $-ab$.

4. L'ordonnée à l'origine est toujours un produit de deux entiers donc ne peut pas être un nombre premier.

TP 3. Famille de droites

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser un paramètre pour étudier différentes positions d'une droite.

A. 4. Ces droites peuvent être horizontales mais pas verticales et elles semblent avoir un point commun.

5. Non, on ne trouve pas les droites verticales.

6. On écrit $y = mx + m - 1$ qui peut être horizontale si $m = 0$ mais ne peut pas être verticale.

7. Prenons deux valeurs m et m' alors $mx + m - 1 = m'x + m' - 1$ donne $(m - m')(x + 1) = 0$ donc si m et m' sont distincts il y a toujours une solution $x = -1$ qui donne le point commun à toutes les droites $(-1\ ;-1)$.

B. 1. Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m^2 - 1 \end{pmatrix}$ donc pas de droite verticale non plus.

2. On prend deux valeurs m et m'.

$(m^2 - 1)x + m = (m'^2 - 1)x + m'$

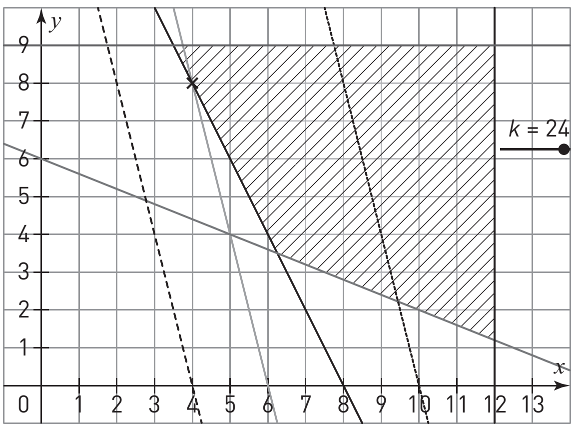
$(m - m')((m + m')x + 1) = 0$

Donc il n'y a pas de point commun à toutes ces droites.

TP 4. Optimisation

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir un problème d'optimisation à l'aide d'équations et d'inéquations du premier degré.

2. 3.



4. Le coût donne $C = 4x + y$.

5. a) $4x + y = 16$ (droite en tirets).

b) Cette droite ne coupe pas le polygone des contraintes donc on ne peut pas réaliser le transport avec cette somme.

6. $4x + y = 40$ (en pointillés) coupe le polygone donc cette somme est possible.

7. Toutes les droites sont parallèles entre elles.

8. On crée un curseur k et on le fait varier jusqu'à ce que la droite « coût » d'équation $4x + y = k$ coupe le polygone en un point à coordonnées entières. Ici on obtient une solution à 2 400 000 euros avec 4 avions de type A et 8 avions de type B.

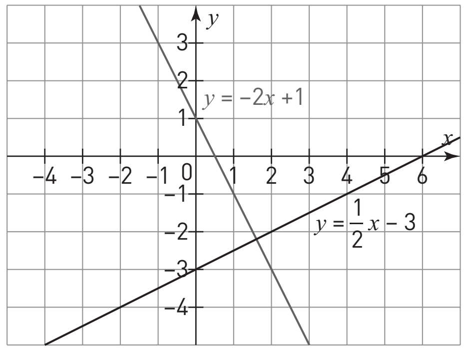
En autonomie p. 184-185

Étudier graphiquement les équations de droites

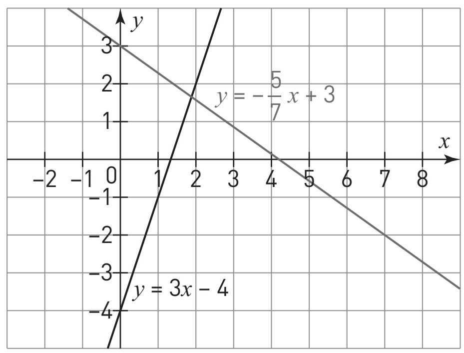
109. d **110. c**

111. b **112. d**

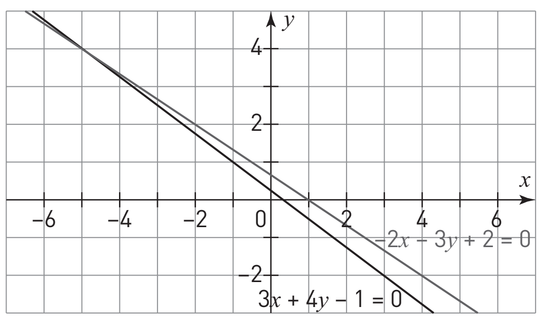
113.



114.



115.



Étudier les équations de droites par le calcul

116. d **117.** a

118. b **119.** b

120. c

121. $y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$

122. $y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{4}$

123. $x - 5y - 14 = 0$

124. $-6x + y - 17 = 0$

125. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

2. $5x + 3y + 1 = 0$

Résoudre des systèmes d'équations

126. b **127.** d

128. c **129.** b

130. a

131. Le système $\begin{cases}-2x - y + 5 = 0\\ 3x - y - 1 = 0\end{cases}$ a pour solution $\left(\frac{6}{5} ; \frac{13}{5}\right)$.

132. Le système $\begin{cases}\frac{2}{3}x - y - 1 = 0\\ -x + 2y + 4 = 0\end{cases}$ a pour solution $\left(\frac{18}{7} ; \frac{5}{7}\right)$.

133. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes.

2. On obtient le système $\begin{cases}-6x - 3y - 3 = 0\\ -2x - 5y - 11 = 0\end{cases}$ a pour solution $\left(\frac{3}{4} ; -\frac{5}{2}\right)$.

134. 1. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

b) Leur déterminant est nul.

c) Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles et le quadrilatère ABCD est un trapèze.

2. F(0 ; 4) et H$\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

3. a) (AD) : $x = -3$ et (BC) : $3x + 3y - 24 = 0$

b) Le système a pour solution E(−3 ; 11).

4. (BD) : $x + 9y - 24 = 0$ et (AC) : $6x - 6y + 12 = 0$ qui donnent G$\left(\frac{3}{5} ; \frac{13}{5}\right)$.

5. (EF) : $7x + 3y - 12 = 0$.

6. Les coordonnées des points G et H vérifient cette équation donc ils sont tous alignés.

CHAPITRE 8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence

Manuel p. 188-215

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre est le premier qui traite du thème des fonctions en seconde. Son objectif est de permettre la transition entre le travail amorcé au collège et qui est poursuivi au lycée.

Généralités sur les fonctions : on continue ici le travail sur les utilisations des fonctions et leurs différentes représentations, notamment les courbes représentatives, pour résoudre des problèmes. S'appuyant surtout sur l'aspect graphique, on y introduit la notion de parité.

Fonctions de référence : cette partie est surtout une synthèse de fonctions usuelles sur lesquelles on peut travailler des notions vues dans la partie précédente.

Capacités

- → Résoudre graphiquement des équations ou inéquations à l'aide de courbes représentatives.
- → Modéliser une situation avec une fonction.
- → Conjecturer la parité d'une fonction.
- → Connaître des fonctions de référence.
- → Résoudre des équations et inéquations avec des fonctions de référence.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 189

1. Lire des coordonnées

A(3 ; 20) ; B(4 ; 60) et C(– 1 ; 70)

2. Lire graphiquement des images et des antécédents

a) 4 **b)** 1 **c)** 0 ; 4 et 7

3. Calculer des images

a) – 360 **b)** – 100 **c)** – 10

4. Résoudre des équations

a) $\frac{11}{2}$ **b)** – 2 et 7 **c)** $-\frac{1}{2}$

d) 225 **e)** $\frac{1}{8}$ **f)** $\sqrt{10}$ et $-\sqrt{10}$

5. Utiliser un programme de calcul

1. 19 **2.** $(x-5)^2+3$

6. Modéliser avec une expression algébrique

$\mathscr{A} = x(6-x) = 6x - x^2$ pour $x \in [0\ ;\ 5]$.

Activités p. 190-191

Activité 1. Modéliser une situation avec une fonction

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** L'objectif de cette activité est la modélisation d'une situation par une fonction. Elle permet de réfléchir autour de l'expression algébrique d'une fonction issue d'une situation géométrique et de l'utilisation d'une courbe représentative.

1. Il s'agit de AB = 10 m.

La distance maximale est obtenue lorsque M est situé au coin opposé à A dans le rectangle. Le triangle ABM est alors rectangle en M et, d'après le théorème de Pythagore :

$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 10^2 + 25^2 = 725$,

donc $AM = \sqrt{725} = 5\sqrt{29} \approx 26{,}93$ m.

2. a) $x \in [0\ ;\ 25]$

b) Le triangle ABM est rectangle en B et, d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 10^2 + x^2$, donc $AM = \sqrt{x^2 + 100}$.

c) Si $x = 12$, la distance parcourue est :
$f(12) = \sqrt{244} = 2\sqrt{61} \approx 15{,}62$ m.

3. a) Vrai car pour $x = 10$ on a $f(x) \approx 14$.

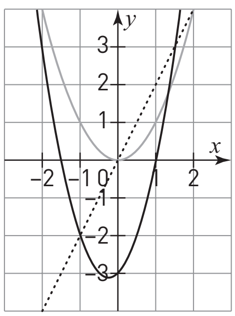
b) Vrai car pour $x \in [5 ; 15]$ les distances parcourues sont supérieures à 17 graphiquement.

c) Vrai pour $x \approx 18$.

Activité 2. Découvrir la notion d'équation de courbe

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Travailler autour de l'appartenance d'un point à une courbe et de la notion d'équation de courbe.

1.



2. a) Voir ci-dessus (droite en pointillés).

b) Non, il n'appartient pas à cet ensemble car $2 \times 250 = 500 \neq 501$.

3. a) Voir ci-dessus (courbe grise).

b) Oui, il appartient à cet ensemble car $15^2 = 225$.

4. a) $2 \times 2^2 + 2 - 3 = 7$ donc T appartient à la représentation graphique de la fonction h.

b) Voir ci-dessus (courbe noire).

Activité 3. Découvrir la notion de parité

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir/observer sous différentes formes la notion de parité d'une fonction.

1. Il a raison car $x^2 = (-x)^2$, donc les images de x et $-x$ par la fonction seront égales.

2. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. Comme on sait que $h(-x) = -h(x)$, on peut retrouver les images manquantes.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$h(x)$	14	3	–9	0	9	–3	–14

4. La première.

Activité 4. Découvrir les fonctions de référence

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir les fonctions de référence en associant des éléments les définissant.

1. Fonction carré : **A) b) IV)**

2. Fonction inverse : **B) c) I)**

3. Fonction cube : **C) d) III)**

4. Fonction racine carrée : **D) a) II)**

À vous de jouer ! p. 197-199

1. a) $S = \{-2 ; 0\}$ **b)** $S = \{1\}$

2. a) $S = \{1\}$ **b)** $S = \varnothing$

3. a) $S = \{5\}$ **b)** $S = \{3 ; 4\}$

4. a) $S = [-2 ; 0]$ **b)** $S = [1 ; 5]$

5. a) $S = [-2 ; 3] \cup [4 ; 5]$ **b)** $S = [-2 ; 2[$

6. f semble paire car la courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

7. g n'est ni paire ni impaire (pas de symétrie caractéristique).

8. a) $S = \left[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\right]$ **b)** $S =]25 ; +\infty[$

c) $S =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$

9. a) $S =]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$ **b)** $S =]0 ; 3[$

c) $S = [0 ; 10\,000]$

Exercices d'application p. 200-202

Apprendre à apprendre

10. Le chapitre 4 pour les équations du type $x^2 = k$ par exemple.

Le chapitre 3 pour les mises en équations ou inéquations de problèmes par exemple.

11. Se référer au cours p.195.

Questions - Flash

12. $f(2) = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 5$

13. $h(3) = (2 \times 3 - 6)(2 \times 3 + 1) = 0$

14. a) $k(10) = -7 \times 10 + 9 = -61$
b) $k(-4) = -7 \times (-4) + 9 = 37$
c) $k\left(\frac{3}{7}\right) = -7 \times \frac{3}{7} + 9 = 6$
d) $k\left(\sqrt{5}\right) = -7\sqrt{5} + 9 = 9 - 7\sqrt{5}$

15. a) $m(-5) = 4$ **b)** Par exemple 2.

16. $10x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$: c'est $\frac{1}{2}$.

17. A(3 ; 5)

18. $k(-1) = 2$

19. $f(-1) \neq -f(1)$, donc elle n'est pas impaire.

20. $h(2) = 4$; $h(-6) = (-6)^2 = 36$ et $h(100) = 10\,000$

21. a) 1 **b)** 10^{12} **c)** -27
d) 6 **e)** 1 **f)** $10^2 = 100$

22. L'antécédent de 100 est $\frac{1}{100} = 0{,}01$.

L'antécédent de -1 est $\frac{1}{-1} = -1$.

L'antécédent de 0,2 est $\frac{1}{0{,}2} = 5$.

Image et antécédents

23. a) $f(2) = 3 \times 2^2 + 7 \times 2 = 26$
b) $f(-3) = 3 \times (-3)^2 + 7 \times (-3) = 6$
c) $f(0) = 3 \times 0^2 + 7 \times 0 = 0$
d) $f\left(\sqrt{5}\right) = 3 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 + 7 \times \sqrt{5} = 15 + 7\sqrt{5}$

24. a) $h(x) = 3 \Leftrightarrow 3x - 8 = 3 \Leftrightarrow 3x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$.

L'antécédent de 3 est $\frac{11}{3}$.

b) $h(x) = -5 \Leftrightarrow 3x - 8 = -5 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
L'antécédent de -5 est 1.

c) $h(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 8 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{17}{2} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$

L'antécédent de $\frac{1}{2}$ est $\frac{17}{6}$.

d) $h(x) = 0{,}1 \Leftrightarrow 3x - 8 = 0{,}1 \Leftrightarrow 3x = 8{,}1 \Leftrightarrow x = \frac{8{,}1}{3} = 2{,}7$

L'antécédent de 0,1 est 2,7.

25. 1. $f(6) = \frac{4}{3} \times 6 + 5 = 13$ et $f(7) = \frac{4}{3} \times 7 + 5 = \frac{43}{3}$.

2. $f(-5) = \frac{4}{3} \times (-5) + 5 = -\frac{5}{3}$

26. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3 - 2x)(5x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 2x = 0$ ou $5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{5}$

Les antécédents de 0 par f sont $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{5}$.

27. 1. $f(3) = \frac{4 \times 3 + 2}{1 + 3^2} = \frac{14}{10} \neq 1$

2. $f(2) = 2$ et $f(0) = 2$, donc $f(2) = f(0)$.

3. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{5}$

4. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x + 2}{1 + x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0$ et $1 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

L'antécédent de 0 est $-\frac{1}{2}$.

28. a) 1,5 **b)** 3 **c)** $-1{,}4$ et 1,4 **d)** 0

29. a) 3
b) $g(1) = 1{,}6$ et $g(-2) = 1$
c) Antécédent de -1 : 3.
Antécédents de 1 : -2 et 1,5.
5 n'a pas d'antécédent.

30. 1. $u(2) = 10$; -4 n'a pas d'image car -4 n'est pas un entier naturel, de même pour $\frac{1}{2}$.

2. $u(n) = 40 \Leftrightarrow 4 + 3n = 40 \Leftrightarrow n = 12$

12 est l'antécédent de 40.

$u(n) = 147 \Leftrightarrow 4 + 3n = 147 \Leftrightarrow n = \frac{143}{3}$ qui n'est pas entier. 147 n'a pas d'antécédent.

Équation d'une courbe

31. 1. a) 1 005 **b)** Oui car $f(10) = 1\,005$.

2. $f(-2) = -3$, donc -3.

32. 1. $g(2) = 11$ **2.** A(2 ; 11)

3. Par exemple B(0 ; 1) ou C(− 1 ; 2).

33. 1. Non car $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3} \neq 5$.

2. $y_T = 0 \Leftrightarrow 5x_T + 2 = 0 \Leftrightarrow x_T = -\frac{2}{5}$

34. 1. Non car $f(0) = 4 \neq 5$.

2. $y_B = 0 \Leftrightarrow \frac{2x_B + 4}{x_B + 1} = 0 \Leftrightarrow x_B = -2$.

35. 1. $y = -2x^2 + 3x$

2. a) Oui **b)** Non **c)** Non **d)** Non

36. 1. Oui car $f(-1) = 9$.

2. $f(4) = 54$ donc B(4 ; 54).

3. $f(x) = 33 \Leftrightarrow 3x^2 + 6 = 33 \Leftarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

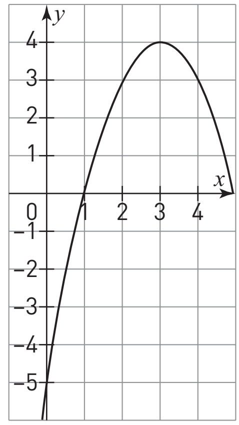
Il y a donc C(3 ; 33) et D(− 3 ; 33).

37. 1. a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h(x)$	− 5	− 2,25	0	1,75	3	3,75

x	3	3,5	4	4,5	5
$h(x)$	4	3,75	3	1,75	0

b) et **c)**

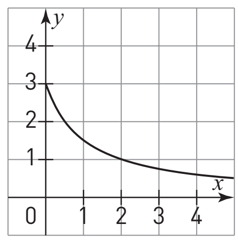


2. a)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h(x)$	3	2	1,5	1,2	1	0,86

x	3	3,5	4	4,5	5
$h(x)$	0,75	0,67	0,6	0,55	0,5

b) et **c)**



Résolution graphique d'équations et inéquations

Cette série d'exercices ne traite pas tous les cas possibles de solutions, notamment pour les inéquations, et des valeurs approchées sont utilisées (lecture graphique). On peut réutiliser les courbes, par exemple celle de l'exercice 38 pour créer des inéquations avec des valeurs plus faciles à lire, ou encore celle de l'exercice 41 pour créer une réunion de trois intervalles comme ensemble de solutions.

38. a) $S = \{0 ; 3 ; 4\}$ **b)** $S = \{1 ; 2 ; 5 ; 6\}$

c) $S = \varnothing$ **d)** $S = \{0,5 ; 2,5 ; 4,4 ; 7\}$

39. a) $S = \{-2,5 ; 1,2 ; 3,5\}$ **b)** $S = \varnothing$

c) $S = \{-4,5 ; 1,8 ; 2,3\}$ **d)** $S = \{-0,8 ; 0,6 ; 4,7\}$

40. a) $S = \{-2 ; 0\}$ **b)** $S = \{-1 ; 1\}$

c) $S = [-3 ; 2[$ **d)** $S =]1 ; 4]$

e) $S = [-3 ; 4]$ **f)** $S = \{-3\}$

41. a) $S = [-1,5 ; 4,7]$
b) $S = \varnothing$
c) $S = [-5 ; -3[$
d) $S = [0 ; 2,7[\cup]3,5 ; 4,4[$

42. a) $S = \{-1 ; 2\}$
b) $S = [-2 ; -1] \cup [2 ; 3]$
c) $S =]-1 ; 1[$
d) $S = [-2 ; 3]$
e) $S = \{-2\} \cup [1,5 ; 3]$

43. a) $S = \{-1,5 ; 0,5\}$
b) $S = [-4 ; -3,6[\cup [2,6 ; 3]$
c) $S = \{-3,1 ; 1,8\}$
d) $S = [-4 ; -3,1] \cup [1,8 ; 3]$

Fonctions paires et impaires

44. a) paire **b)** impaire
c) paire **d)** ni paire, ni impaire

Fonctions de référence

45. a) 16 **b)** 9 **c)** 10^6 **d)** $\frac{1}{4}$

46. a) $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$ **b)** 8 et -8
c) pas d'antécédent **d)** 10^3 et -10^3

47. a) $\frac{1}{5}$ **b)** 10^{-2} **c)** $-\frac{1}{3}$ **d)** 4

48. a) $\frac{1}{6}$ **b)** 1 **c)** $-\frac{1}{2}$ **d)** 10^{-4}

49. a) 2 **b)** $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
c) 10^4 **d)** -3 n'a pas d'image.

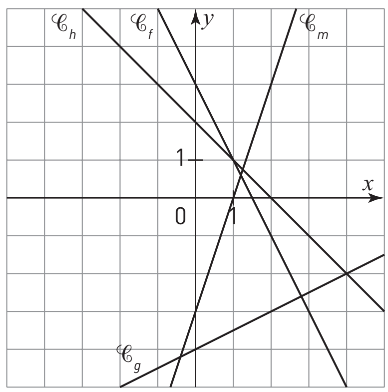
50. a) 36 **b)** 5
c) -5 n'a pas d'antécédent.
d) 10^4

51. a) 8 **b)** -27 **c)** 10^{12} **d)** $\frac{1}{8}$

52. a) $S =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$
b) $S =]-\sqrt{5} ; \sqrt{5}[$
c) $S =]-\infty ; 0[\cup \left]\frac{1}{5} ; +\infty\right[$
d) $S = \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[\cup]0 ; +\infty[$
e) $S = [0 ; 9]$
f) $S =]81 ; +\infty[$

53. a) f est affine avec $m = -2$, et $p = 8$.
b) g n'est pas affine.
c) h n'est pas affine.
d) $i(x) = \frac{2x}{4} + \frac{8}{4} = 0,5x + 2$, donc i est affine avec $m = 0,5$ et $p = 2$.

54. Les représentations graphiques des fonctions affines sont des droites.



55. ① Une parabole, donc cela fait penser à la fonction carré.
② La courbe ressemble à la courbe de la fonction cube (mais ne l'est pas).
③ Il s'agit d'une fonction affine.
④ Une hyperbole, donc cela fait penser à la fonction inverse.

Calculs et automatismes

56. $g(0) = 0$; $g(1) = \frac{5}{2}$ et $g(9) = 4,5$.

57. $A = 3(x^2 - 2x + 1) - 12 = 3x^2 - 6x - 9$
$B = (3x - 9)(x + 1) = 3x^2 - 6x - 9$

Exercices d'entraînement p. 203-207

Ensemble de definition et modélisation

58. 1. $x = 1$

2. On peut calculer l'image si $x - 1$ ne s'annule pas, donc on ne peut pas calculer l'image de 1.

3. $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ ou $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

59. a) $]-\infty\ ;\ 10[\cup]10\ ;\ +\infty[$

b) $[0\ ;\ +\infty[$

c) $\mathbb{R}$

d) $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ ou $\mathbb{R}^*$

60. $[-3\ ;\ 2]$

61. 1. $x \in [5\ ;\ 40]$ **2.** $[5\ ;\ 40]$

3. $P(x) = 1{,}40x$

62. 1. $x \in [0\ ;\ 5]$ (contrainte de la largeur)

2. $\mathscr{A}(x) = 5x + 7x - x^2 = 12x - x^2$

3.

x	0	1	2	3	4	5
$\mathscr{A}(x)$	0	11	20	27	32	35

63. $g(x) = 3x^2 - 2x + 12$ pour tout réel $x \in [-1\ ;\ 5]$.

64. 1. x étant un nombre réel, x^2 est positif et donc $x^2 + 1$ également. On peut donc en calculer la racine. Le calcul d'une image étant possible pour toutes les valeurs de x, r peut être définie sur $\mathbb{R}$.

2.

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5
$r(x)$	10,05	9,06	8,06	7,07	6,08	5,1

x	-4	-3	-2	-1	0
$r(x)$	4,12	3,16	2,24	1,41	1

x	1	2	3	4	5
$r(x)$	1,41	2,24	3,16	4,12	5,1

x	6	7	8	9	10
$r(x)$	6,08	7,07	8,06	9,06	10,05

65. 1. Il faut que le résultat du calcul à l'intérieur de la racine carrée soit positif, donc que $6x + 12 \geqslant 0$.

2. $6x + 12 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$.

L'ensemble de définition est donc $[-2\ ;\ +\infty[$.

Recherche d'antécédents

66. 1. On peut calculer l'image de n'importe quel nombre, donc l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. On résout $f(t) = 6$.

$2(t+7)^2 - 4 = 6 \Leftrightarrow (t+7)^2 = 5$

$x = \sqrt{5} - 7$ ou $x = -\sqrt{5} - 7$: ce sont les deux antécédents de 6.

67. 1. Le calcul d'une image est possible si le dénominateur ne s'annule pas, donc si $x \neq 5$.

L'ensemble de définition est $]-\infty\ ;\ 5[\cup]5\ ;\ +\infty[$.

2. On résout $m(x) = 6$.

$\dfrac{2x}{x-5} = 6 \Leftrightarrow 2x = 6(x-5)$ et $x \neq 5$

$2x = 6x - 30 \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{2}$

L'antécédent de 6 est $\dfrac{15}{2}$.

De la même façon, l'antécédent de -2 est 2,5.

68. 1. $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On résout $m(x) = 6$.

$\sqrt{x} - 1 = 6 \Leftrightarrow x = 49$. L'antécédent de 6 est 49.

-2 n'a pas d'antécédent.

69. 1.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0
$h(x)$	-35	$-22{,}75$	-12	$-2{,}75$	5

x	0,5	1	1,5	2
$h(x)$	11,25	16	19,25	21

2. Les antécédents de 0 par h sont $-\dfrac{1}{3}$ et 5.

70. 1. 3,5

2.

```
Afficher "Entrer la valeur de b"
Lire b
antecedent←(b-5)/(-2)
Afficher "l'antécédent de ",b," est ",
                                antecedent
```

71. 1. $b = -7$ et $a = 3$.

2. h n'est ni paire (car $h(-1) \neq h(1)$), ni impaire (car $h(-1) \neq -h(1)$).

3. On résout $h(x) = -7$.

$x^2 + 3x - 7 = -7 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$.

Les antécédents de -7 par h sont 0 et -3.

72. Comme $f(0) = 3$, on trouve $b = 3$.

Comme $f(2) = 5$, on trouve ensuite $a = \frac{1}{2}$. Alors $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Les antécédents de 10 par f sont $-\sqrt{14}$ et $\sqrt{14}$.

73. 1. $C_m(V) = \frac{10}{V}$ **2.** $C_m(V) = \frac{10}{V} = 30 \Leftrightarrow V = \frac{1}{3}$

3. Pour obtenir une concentration massique de 30 grammes par litre, il faut $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ litre d'eau.

74. 1. a) $x = -2$ **b)** $x = \sqrt[3]{20} \approx 2{,}71$ **c)** $x = 100$

2. a) 5 **b)** 0 **c)** $\sqrt[3]{20} \approx 2{,}71$ **d)** 1 000

3. a) $S = [2\ ;+\infty[$ **b)** $S =]-\infty\ ;1[$ **c)** $S = \left]-\infty\ ;\sqrt[3]{4}\right]$

Courbes et équations

75. A est sur la courbe, donc $f(5) = 22$, c'est-à-dire $25 + 15 + p = 22$, donc $p = -18$.

76. 1. $g(-2) = 2$, donc le point A appartient à la courbe.

2. On résout $g(x_B) = 5$ et on trouve $x_B = 1$.

77. Pour l'intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = 15$, donc A(0 ; 15).

Pour l'intersection avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$, soit B(7,5 ; 0).

78. 1. $3 \times (-2)^2 + 2 \times (-4) - 4 = 12 - 8 - 4 = 0$, donc A appartient à cet ensemble.

2. $x = 0$, donc $2y - 4 = 0$, soit $y = 2$ est l'ordonnée de B.

3. $3x^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x^2 + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$

C'est donc la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2$.

79. $yx^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y(x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

C'est donc la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

80. 1. Non, car $2 \times 1{,}5 = 3 \neq 5$.

2. Non, car cela impliquerait $0 = 5$.

3. $xy = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{x}$. C'est donc la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{5}{x}$.

Fonction et nombre entier

81. 1. $p(124) = 2$

2. $x = 63$ par exemple pour $p(x) = 6$ et $x = 105$ pour $p(x) = 0$.

3. 20 ; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29 ; 120 ; 121 ; 122 ; 123 ; 124 ; 125 ; 126 ; 127 ; 128 ; 129.

82. 1. $u(4) = 210$

2. n est entier supérieur ou égal à 1 et $u(n) = 130 + 20n$.

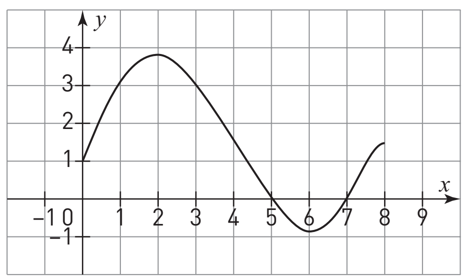
3. On résout $u(n) \geqslant 350$. Cela est vraie pour $n \geqslant 11$. Ce sera l'année numéro 11.

Résolution d'équations et inéquations

83. 1. d) **2. d)** **3. a)** et **c)**

4. d) **5. a)** **6. b)**

84. Par exemple :



85. 1. On résout $2x^2 + 2x + 6 = 2x^2 - 3x + 7 \Leftrightarrow 5x = 1$

Le point d'intersection est $A\left(\frac{1}{5}\ ;6{,}48\right)$.

2. On résout $\frac{1}{x} = \frac{2 + 3x}{x} \Leftrightarrow 1 = 2 + 3x$ et $x \neq 0$

Le point d'intersection est $B\left(-\frac{1}{3}\ ;-3\right)$.

86. 1. La fonction affine g est représentée par la droite verte, et la fonction carré est représentée par la parabole.

2. Graphiquement, $S = \{-1{,}7\ ;2{,}7\}$.

3. a) $(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$

b) $x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$

Les solutions sont -2 et 3.

87. 1. Droite violette : fonction affine g et hyperbole : fonction inverse

2. Graphiquement, $S = \{-1 ; 0{,}5\}$.

3. a) $(2x-1)(x+1) = 2x^2 + x - 1$

b) $\dfrac{1}{x} = 2x + 1 \Leftrightarrow 1 = 2x^2 + x \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftarrow (2x-1)(x+1) = 0$ et $x \neq 0$.

Les solutions sont -1 et 0,5.

88. 1. Graphiquement, environ $-0{,}8$ et 4,8.

2. a) Entre 4,8 et 4,9.

b) L'amplitude est de 0,1. On peut donner une valeur approchée d'environ 4,85 avec une précision de 0,05.

3. À l'aide du tableau de la calculatrice, on trouve que la deuxième solution est entre $-0{,}9$ et $-0{,}8$ puis entre $-0{,}83$ et $-0{,}82$ en changeant le pas.

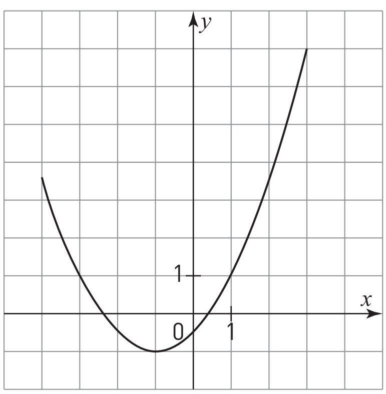
89. 1. Elle semble fausse.

2. Sur $[-5 ; 3]$, il n'y a qu'une seule solution : entre 0,3 et 0,4. Sur $\mathbb{R}$, il y aurait une deuxième solution : entre $-6{,}4$ et $-6{,}3$.

90. 1.

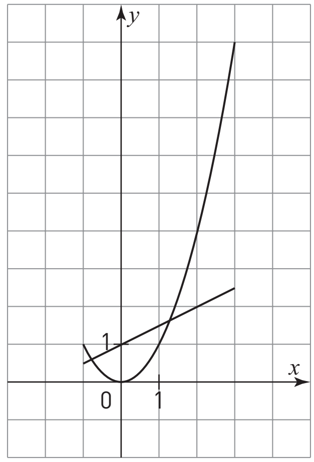
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3,5	1	$-0{,}5$	-1	$-0{,}5$	-1	3,5	7

2.



3. Graphiquement, $S = [-4 ; -3{,}5[\cup]1{,}4 ; 3]$ et on peut conjecturer $S =]-\infty ; -3{,}5[\cup]1{,}4 ; +\infty[$.

91. 1.



2. $S = [-1 ; -0{,}8] \cup [1{,}3 ; 3]$.

Avec la forme la plus adaptée

92. 1. On développe :
$g(x) = 2(x^2 + 2x + 1) - 8 = 2x^2 + 4x - 6$
et $h(x) = (2x-2)(x+3) = 2x^2 + 4x - 6$
d'où l'égalité des trois expressions.

2. a) En utilisant la forme factorisée $h(x)$, les antécédents de 0 sont 1 et -3.

En utilisant la forme développée $f(x)$, les antécédents de -6 sont 0 et -2.

b) $f(0) = -6$ d'après $f(x)$; $f(1) = 0$ d'après $h(x)$ et $f\left(\sqrt{3}-1\right) = -2$ d'après $g(x)$.

c) On résout $f(x) = 24$ avec l'expression de $g(x)$.

$2(x+1)^2 - 8 = 24 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 16$

Les abscisses de ces points sont 3 et -5.

93. 1. $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$

2. a) Les antécédents de 0 sont 1 ; -1 et -5.

b) $(x^2-1)(x+5) = (x+5) \Leftrightarrow (x^2-1)(x+5) - (x+5) = 0$
$\Leftrightarrow (x+5)(x^2-1-1) = 0$ en factorisant.

$(x+5)(x^2-2) = 0$: les solutions sont $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ et -5.

Modélisation et problèmes

94. 1. $x \in [0 ; 6]$

2. $\mathcal{A}_{\text{AMN}} = \dfrac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{A}_{\text{MBE}} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times (6-x) = 9 - 1{,}5x$.

3. $\mathcal{A}_{\text{NMED}} = 36 - \dfrac{1}{2}x^2 - (9 - 1{,}5x) - 9 = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1{,}5x + 18$

4.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\mathcal{A}(x)$	18	18,625	19	19,125	19	18,625	18

x	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$\mathcal{A}(x)$	17,125	16	16,625	13	11,125	9

95. 1. Non car AB = 6, l'ensemble de définition est [0 ; 6].

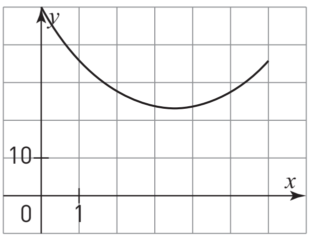
2. On soustrait l'aire des triangles en vert à l'aire de ABCD :

$$f(x) = 48 - 2 \times \frac{\text{AM} \times \text{AQ}}{2} - 2 \times \frac{\text{BN} \times \text{BM}}{2}$$

$= 48 - x(8 - x) - x(6 - x) = 48 - 8x + x^2 - 6x + x^2$

$= 2x^2 - 14x + 48$

3.



4. Graphiquement, pour $x \in [0 ; 3] \cup [4 ; 6]$.

96. 1. $f(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \times \pi}{2} = \dfrac{x^2\pi}{8}$ et

$g(x) = \dfrac{\text{BM} \times \text{BC}}{2} = \dfrac{(\text{AB} - x)\text{BC}}{2}$ correspond à l'expression d'une fonction affine.

Donc *g* est représentée par la droite verte et *f* par la courbe violette.

2. x vaut 7 au maximum, donc AB = 7.

D'après la droite tracée, lorsque $x = 0$, $g(0) = 21$. Dans ce cas, M est sur le point A. MBC correspond alors à ABC donc $\dfrac{\text{BC} \times 7}{2} = 21$, soit BC = 6.

3. $x \approx 4{,}4$. On peut améliorer la précision avec, par exemple, le tableur de la calculatrice. On trouve alors $x \approx 4{,}43$.

97. A. 1. Il s'agit de refaire la figure avec BM = 3 cm.

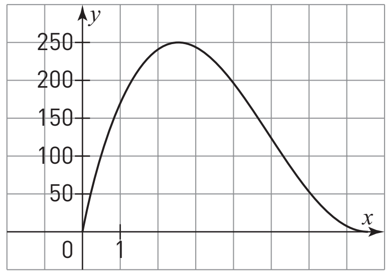
2. La base de la boîte est alors un carré d'aire égale à $9 \times 9 = 81$ cm^2. Sa hauteur est 3 cm, donc le volume est $81 \times 3 = 243$ cm^3.

3. Si BM = 8 cm, alors le carré hachuré situé en T ne peut pas être découpé avec des dimensions identiques. On ne peut pas faire le patron.

B. 1. $l \times L \times h = (15 - 2x)^2 x$

2. [0 ; 7,5] car M ne peut pas se situer au-delà du milieu de [BT].

3.



4. Graphiquement, pour $x \in [0{,}5 ; 5{,}3]$ (on pourra arrondir les bornes avec la calculatrice).

5. 1 dL correspond à 100 cm^3, donc il peut dépasser 1 dL pour $x \in]0{,}5 ; 5{,}3[$.

98. 1. 300 euros (3 centaines d'euros) environ.

2. 74 pièces environ.

3. $R(x) = 20x$

4. C'est une fonction affine donc elle est bien représentée par une droite. De plus, $R(40) = 800$, soit 8 centaines d'euros, et $R(80) = 1\,600$, soit 16 centaines d'euros. Cela correspond bien.

5. Le bénéfice est positif lorsque les recettes sont supérieures aux coûts de fabrication. Elle doit fabriquer au maximum 76 pièces (donc entre 40 et 76 pièces) pour obtenir un bénéfice positif.

99. En posant AB = x, on a $x \in [1 ; 100]$.

Alors AC = $x + 2$ et BC = $\sqrt{x^2 + (x + 2)^2}$.

En tabulant la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + (x + 2)^2}$ à la calculatrice (ou avec le tableur) de 1 à 100 avec un pas de 1, on déterminer les cas possibles :

AB = 6 ; AC = 8 et BC = 10 et AB = 40 ; AC = 42 et BC = 58.

Travailler autrement

100. Il s'agit de résoudre : $2x^2 + \dfrac{5 \times 2x}{2} \leqslant 100$ soit $2x^2 + 5x \leqslant 100$.

Avec le tableur ou la calculatrice, on trouve que x ne doit pas dépasser 5,93 environ.

101. On trouve 1707, année de naissance de Leonhard Euler.

Exercices bilan p. 208

102. Lecture graphique et calcul

A. 1. $f(2) = 8$

2. $f(-2) = 4$

3. $-1{,}7$ et $3{,}7$

4. $S = \{-2 ; 4\}$

5. $S = [-3 ; -1{,}3[\cup]3{,}2 ; 4]$

6. $S = [0 ; 2]$

B. 1. L'image de 3 est 6,5.

2. Non, car $f(-1) = 6{,}5 \neq 6{,}6$.

103. Lecture et calcul

A. a) $S = \{-2 ; 4\}$

b) $S =]-0{,}2 ; 2{,}2[$

c) $S = [-2 ; -1] \cup [3 ; 4]$

d) $S = \{-1 ; 1{,}7\}$

B. 1. $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

2. $-2(x-1)^2 + 8 = -2(x^2 - 2x + 1) + 8 = -2x^2 + 4x + 6 = f(x)$

3. a) On résout $f(x) = 0$ en utilisant $(x+1)(6-2x) = 0$.

$x = -1$ ou $x = 3$, d'où les points de coordonnées $(-1 ; 0)$ et $(3 ; 0)$.

b) $f(x) = 4 \Leftrightarrow -2(x-1)^2 + 8 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$

Les antécédents sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

4. Le logiciel de calcul formel indique que $f(x) = g(x)$ pour $x = -1$ ou $x = \frac{5}{3}$. De plus, $f(-1) = 0$ et $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{64}{9}$.

Les coordonnées des points d'intersection sont $(-1 ; 0)$ et $\left(\frac{5}{3} ; \frac{64}{9}\right)$.

104. Hauteur d'une fusée

1. $h(3) = 30$, donc 30 mètres.

2. On résout $h(t) = 0$ c'est-à-dire $25t - 5t^2 = 0$
$\Leftrightarrow 5t(5-t) = 0$.

$t = 0$ (c'est le moment où la fusée décolle) ou $t = 5$ qui signifie que la fusée retombe au bout de 5 secondes.

3.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h(t)$	0	11,25	20	26,25	30	31,25

t	3	3,5	4	4,5	5
$h(t)$	30	26,25	20	11,25	0

4. D'après le tableau, cette durée est d'environ 4 secondes. En augmentant la précision au dixième par exemple, cela reste identique.

105. Avec des aires

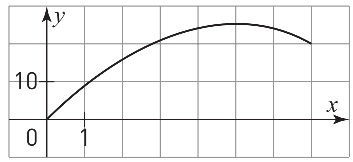
1. $\mathscr{A}(x) = \text{AP} \times \text{AM} = (10-x)x = 10x - x^2$ pour $x \in [0 ; 7]$.

2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathscr{A}(x)$	0	9	16	21	24	25	24	21

3. Xmin=0 ; Xmax=7 ; Ymin=-5 et Ymax=30 par exemple.

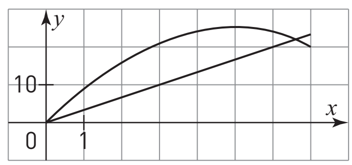
4.



5. Graphiquement, l'aire de AMNP est supérieure ou égale à 20 pour $x \in [2{,}9 ; 7]$.

6. L'aire de BEP est donnée par la formule $g(x) = \frac{x \times 7}{2} = 3{,}5x$ pour $x \in [0 ; 7]$.

On trace sa courbe dans le même repère que celle de la fonction $\mathscr{A}$.



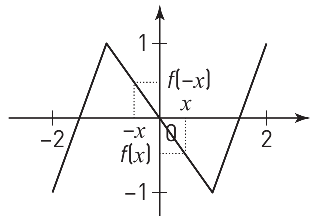
Les deux aires sont égales pour $x = 6{,}5$ (peut se vérifier par le calcul).

Exercices d'approfondissement p. 209

106. Symétrie et fonction impaire

Soit x un nombre de l'ensemble de définition et le point $(x ; f(x))$ de la courbe représentative de f associé à x. Montrons que son symétrique par rapport à l'origine qui a pour coordonnées $(-x ; -f(x))$ appartient aussi à la courbe de f.

L'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, donc $-x$ est dans l'ensemble de définition. Comme $f(-x) = -f(x)$ pour tout x, le point de coordonnées $(-x ; f(-x))$ est le même que le point de coordonnées $(-x ; -f(x))$. Or le point de coordonnées $(-x ; f(-x))$ est un point de la courbe de f car l'ordonnée est égale à l'image de l'abscisse. Donc le point de coordonnées $(-x ; -f(x))$ appartient à la courbe de f.



107. Parité et calcul

1. On résout $m(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9}$.

Les abscisses sont $\frac{2}{3}$ et $-\frac{2}{3}$.

2. $m(-x) = 9(-x)^2 - 4 = 9x^2 - 4 = m(x)$, donc cela est vrai pour tout réel x.

3. Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et que $m(-x) = m(x)$, la fonction m est paire.

108. Paire ou impaire ?

On peut tracer les courbes à la calculatrice pour se donner une idée.

a) Ni paire, ni impaire. En effet, $f(1) = 6$ et $f(-1) = 2$.

b) $f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2+1} = \frac{1}{2x^2+1} = f(x)$ et f définie sur $\mathbb{R}$, donc f est paire.

c) Ni paire, ni impaire. En effet, $f(1) = 6$ et $f(-1) = -2$.

d) $f(-x) = 3(-x) + (-x)^3 = -3x - x^3 = -(3x + x^3) = -f(x)$ et f définie sur $\mathbb{R}$, donc f est impaire.

109. Avec un paramètre

1. $S = \{-3 ; -1 ; 2\}$ **2.** $S = \{2{,}7\}$

3. Par exemple 3

4. Si $m < -3$ ou $m > 3$, l'équation n'a pas de solution.

Si $m \in [-3 ; -2[\cup]1 ; 3]$, l'équation a une seule solution.

Si $m = -2$ ou $m = 1$, l'équation a deux solutions.

Si $m \in]-2 ; 1[$, l'équation a 3 solutions.

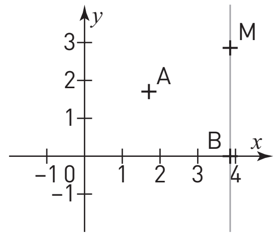
110. Non linéarité de fonctions

1. Non car si on prend par exemple $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$ alors $f(1 + 1) = (1 + 1)^2 = 4$ et $f(1) + f(1) = 2$.

2. Non car si on prend par exemple $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$ alors $f(1+1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et $f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$.

111. Parabole

1. M est à égale distance de A et $(0x)$ si et seulement BM = MA où B est le point de coordonnées $(x ; 0)$.



$\text{BM} = \text{AM} \Leftrightarrow \text{BM}^2 = \text{AM}^2$

$\Leftrightarrow (x - x)^2 + (y - 0)^2 = (x - x_A)^2 = (y - y_A)^2$

$\Leftrightarrow y^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$

2. On développe le membre de droite de l'égalité précédente.

$y^2 = x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y^2 - 2yy_A + y_A^2$

Puis on isole y.

$2yy_A = x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y_A^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y_A^2}{2y_A}$

car $y_A \neq 0$.

M appartient donc à la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y_A^2}{2y_A}$: la courbe est une parabole.

112. Vrai ou faux ?

a) Vrai car si $f(x) = 4$ alors $(x - a)^2 = 0$, donc $x = a$.

b) Faux car l'équation $f(x) = 0$ ou encore $(x - a)^2 = -4$ n'a pas de solution réelle.

c) Vrai car $f(3a) = (3a - a)^2 + 4 = 4a^2 + 4 = 4(a^2 + 1)$.

d) Vrai en prenant $a = 0$ par exemple : $f(x) = x^2 + 4$ est l'expression d'une fonction paire.

113. Somme des chiffres

1. 19 **2.** 5 782

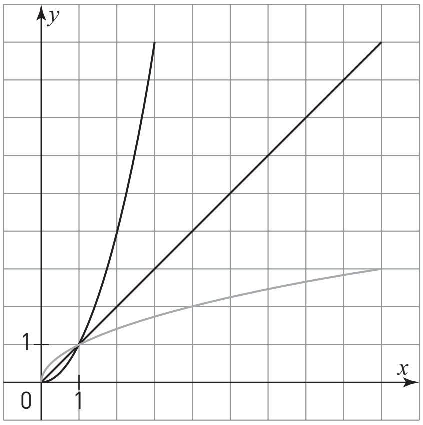
3. Il y en a 20 :

- 1 seul à un chiffre : 3 ;
- 3 à deux chiffres : 12 ; 21 ; 30 ;
- 6 à trois chiffres : 300 ; 120 ; 102 ; 201 ; 210 ; 111 ;
- 10 à 4 chiffres : 3 000 ; 2 100 ; 2 010 ; 2 001 ; 1 200 ; 1 020 ; 1 002 ; 1 110 ; 1 101 ; 1 011 ;
- 0 à 5 chiffres.

4. Oui, il suffit de prendre un nombre avec autant de 1 que le nombre choisi.

114. Lien des fonctions carré et racine carrée

1. La courbe de la fonction racine carrée est en gris.



2. et **3.** Voir ci-dessus.

4. La fonction carré.

5. a) $\sqrt{x^2} = x$ pour tout réel x positif.

b) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ pour tout réel x positif.

Vers la 1re

115. 1. $f(a + h) = a^2 + 2ah + h^2$

2. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$

116. 1. $u(1) = 3$ et $u(2) = 12$.

2. $u(10) = 3\ 072$, donc elle a tort.

Travaux pratiques p. 210-213

TP 1. Tableaux de valeurs, courbes et calculatrices

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Tabuler une fonction et obtenir le tracé d'une courbe représentative à l'aide de la calculatrice.

Ce TP peut être travaillé en amont de certains exercices du manuel qui demandent des tableaux ou des courbes.

A. et **B.** Voir la calculatrice.

C. 1. L'équation a une seule solution.

2. La solution est comprise entre 4 et 5.

3. La solution est comprise entre 4,5 et 5.

Pour approfondir la recherche de la solution, voir le TP 4 qui aborde les méthodes de balayage et de dichotomie.

TP 2. La quadrature du cercle

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Chercher à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la solution à un problème.

La deuxième partie est la modélisation du problème puis la recherche d'une valeur approchée de la solution avec cette modélisation (celle-ci peut, par ailleurs, aussi être obtenue avec le logiciel).

A. 1. Voir la figure.

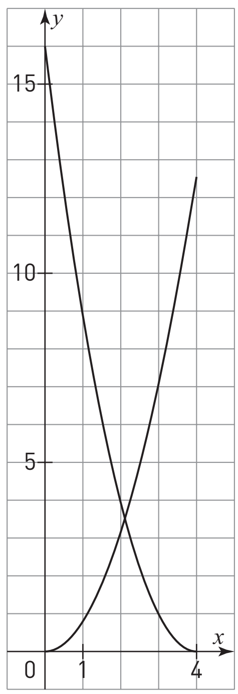
2. Quand x augmente, l'aire du disque augmente et l'aire du carré diminue.

3. Les deux aires semblent égales pour $x \approx 2{,}1$.

B. 1. Les fonctions sont définies sur [0 ; 4].

$d(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \times \pi = \dfrac{x^2\pi}{4}$ et $c(x) = (4 - x)^2$

2.



3. Avec la calculatrice, on peut en trouver une valeur approchée à 0,001 près par exemple : $x_0 \approx 2{,}121$.

TP 3. Longueur d'une portion de courbe

• **Durée estimée :** 50 min

• **Objectif :** Chercher, grâce à un processus algorithmique, la longueur d'une portion de courbe.

1. La fonction Python $f(x)$ permet de définir la fonction de l'énoncé.

La fonction norme permet de renvoyer la norme d'un vecteur dont on connaît les coordonnées dans un repère orthonormé. Il permet donc finalement de calculer la distance entre deux points pour lesquels le décalage des abscisses est $x_2 - x_1 = \frac{1}{n}$ et le décalage des ordonnées est $f(x_2) - f(x_1)$.

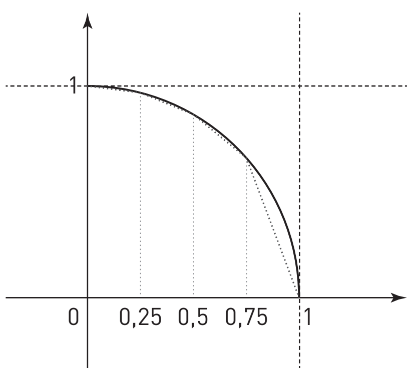
i		0	1
x_1		1	$\frac{1}{2}$
x_2		$\frac{1}{2} = 0,5$	
longueur	0	$\sqrt{0,5^2 + (f(0,5) - f(0))^2}$ $\approx 0,518$	$0,518 + \sqrt{0,5^2 + (f(1) - f(0,5))^2}$ $\approx 1,518$

Il affichera environ 1,518.

2. Python affiche environ 1,517638.

3. Le graphique présente la portion de courbe ainsi que deux segments utilisant les points de la courbe d'abscisses 0 ; 0,5 et 1. Ces segments sont « proches » de la courbe. Le programme calcule et cumule ensuite au fur et à mesure les longueurs de ces deux segments en utilisant les points d'abscisses 0 ; 0,5 et 1 .

4. Si $n = 4$, la courbe sera « approchée » par 4 segments.



5. Les segments vont se rapprocher encore plus de la courbe. La longueur obtenue en cumulant les longueurs des segments sera de plus en plus proche de la longueur de la portion de courbe.

6. Pour $n = 1\,000$, il affiche environ 1,5708.

La longueur d'un quart de cercle de rayon 1 est $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc l'ordinateur affiche une valeur approchée de $\frac{\pi}{2}$.

7. Il faut penser que le découpage sur [0 ; 2] impose que x1 et x2 ont un pas de $\frac{2}{n}$.

```
import math

def f(x):
    y=x**2
    return y

def norme(a,b):
    dist=math.sqrt(a**2+b**2)
    return dist

n=1000
longueur=0
for i in range(0,n):
    x1=2*i/n
    x2=x1+2/n
    longueur=longueur+norme(2/n,f(x2)-f(x1))
print(longueur)
```

Il affiche environ 4,6468.

TP 4. Méthodes par balayage et par dichotomie

• **Durée estimée :** 60 min

• **Objectif :** Introduire la méthode par balayage pour la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation et observer sur un exemple la méthode par dichotomie.

A. 1. $4,6 < \propto < 4,7$. L'amplitude de l'encadrement est 0,1. (La précision de $\propto$ serait à 0,05 près.)

2. $4,64 < \propto < 4,65$. L'amplitude de l'encadrement est 0,01. (La précision de $\propto$ serait à 0,005 près.)

3. $4,641 < \propto < 4,642$

B. 1.

	initiali-sation							
c	X	4,5	4,75	4,625	4,6875	4,65625	4,640625	4,6484375
c^3	X	91,125	107,2	98,9	103	100,95	99,93	100,44
a	4	4,5	4,5	4,625	4,625	4,625	4,640625	4,640625
b	5	5	4,75	4,75	4,6875	4,65625	4,65625	4,6484375
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125
Condition $b - a > 10^{-2}$	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Non vérifiée

2. Il a effectué 8 tests.

3. a) Changer le 10^{-2} de la 3[e] ligne en 10^{-3}.

b)

```
a=4
b=5
while b-a>0.001:
    c=(a+b)/2
    if c**3>100:
        b=c
    else:
        a=c
print(a)
print(b)
```

c) Il a effectué 11 tests.

En autonomie p. 214-215

Utiliser la courbe représentative d'une fonction

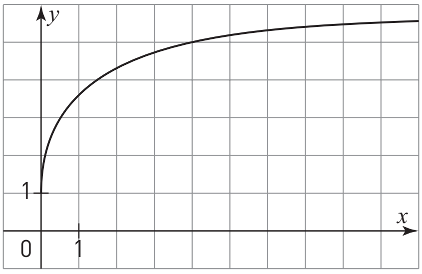
117. **c** **118.** **c** **119.** **a**

120. $[-2 ; 2]$

121. a) $S = \{-6,5 ; 0,9 ; 3,1\}$
b) $S =]-6,5 ; 0,9[\cup]3,1 ; 5]$ **c)** $S = [-7 ; -6,9]$

122. 1. Non car $g(-2) = 20$. **2.** -2
3. $(2 ; 0)$ et $\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$

123.



124. 1. $S = \{2\}$ **2.** $S =]2 ; 6]$

125. 1. $(-0,5 ; 1)$ **2.** Ni paire ni impaire

126. a) $f(1) = g(1) = 9$. **b)** Il y a aussi $B(-1 ; 3)$.

127. 1. 0 **2.** 0 et 3

128. $\left(-\frac{5}{12} ; \frac{2}{13}\right)$

Reconnaître et utiliser des fonctions de référence

129. **a** **130.** **b** et **d** **131.** **b**

132. **b** **133.** **b** **134.** **a** **135.** **a**

136. courbe verte : **a)** ; courbe bleue : **d)**
courbe violette : **c)** ; courbe orange : **a)**

137. a) 2 et -2 par carré ; $\frac{1}{4}$ par inverse
b) $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ par carré ; 9 par inverse
c) pas d'antécédents par carré ; $-\frac{1}{20}$ par inverse.

138. a) $S =]16 ; +\infty[$ **b)** $S = \left]0 ; \frac{1}{5}\right[$

c) $S = \left]-\sqrt{50} ; \sqrt{50}\right[$ **d)** $S =]-\infty ; 4]$

Utiliser une fonction

139. **b** **140.** **c**

141. $x \mapsto (x + 5)^2$ sur $[0 ; 10]$

142. $P(t) = 15 + 2t$ avec t en heures

143. Si $x = AD$ (et donc $AB = 9 - x$), il faut prendre $x \in [2,21 ; 6,79]$.

CHAPITRE 9 Variations et extremums

Manuel p. 216-239

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre poursuit l'étude des fonctions commencée au collège puis développée en seconde avec le chapitre 8.

La notion de « variation » est introduite intuitivement à partir de lectures graphiques pour ensuite être formalisée par la définition précise d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle. Les variations des fonctions de référence, y compris celles des fonctions affines dont l'étude a débuté au collège, sont ensuite démontrées ce qui donne l'occasion de raisonner à partir de la définition.

Le tableau de variations est introduit comme un moyen synthétique de description des variations d'une fonction.

L'étude de variations de fonction, en lien avec les extremums, est aussi ce qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation dans différents cadres, mais elle constitue également un pas supplémentaire vers l'étude des fonctions en tant que telle et se poursuivra en première.

Capacités

→ **Décrire les variations d'une fonction.**
→ **Interpréter un tableau de variations.**
→ **Étudier les variations des fonctions de référence.**
→ **Utiliser les variations d'une fonction pour résoudre un problème, une inéquation.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 217

1. Lire l'image d'un nombre par une fonction

1. Sur l'axe des ordonnées.

2. a) 2 **b)** – 2 **c)** – 1,6 **d)** 0,8

2. Calculer l'image d'un nombre par une fonction

a) – 4 **b)** $-\dfrac{46}{27}$ **c)** 10

3. Reconnaître une fonction

1. a) oui **b)** oui **c)** non **d)** oui

2. a) Fonction carré. **b)** Fonction inverse.

4. Donner un encadrement d'une fonction

1. a) $-2 \leqslant 3x - 5 \leqslant 16$ **b)** $-11 \leqslant 3x - 5 \leqslant 4$

2. a) $-39 \leqslant -4x + 1 \leqslant 1$ **b)** $-3 \leqslant -4x + 1 \leqslant 13$

5. Connaître les fonctions de référence

Voir le cours p. 221.

Activités p. 218-219

Activité 1. Vers le tableau de variations

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Introduire l'étude de variations de fonctions.

1. Elle est de 0,5 °C.

2. Elle augmente entre 1 h et 4 h et entre 7 h et environ 15 h ; elle diminue entre 0 h et 1 h, entre 4 h et 7 h et entre environ 15 h et 24 h.

3.

x	0		1		4		7		15		24
f	$-1{,}3$	↘	$-2{,}2$	↗	$-1{,}6$	↘	$-2{,}9$	↗	$6{,}3$	↘	$-1{,}3$

Activité 2. Sens de variations des fonctions affines

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Conjecturer puis démontrer le sens de variation des fonctions affines.

1. a) b) c) Voir le logiciel.

d) Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow 3x_1 \leqslant 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 4 \leqslant 3x_2 - 4$
$\Leftrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

b) On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow -2x_1 \geqslant -2x_2 \Leftrightarrow -2x_1 + 8 \geqslant -2x_2 + 8$
$\Leftrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$

On en déduit que g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) Si $a > 0$: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow ax_1 \leqslant ax_2$
$\Leftrightarrow ax_1 + b \leqslant ax_2 + b \Leftrightarrow h(x_1) \leqslant h(x_2)$
On en déduit que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Si $a < 0$: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow ax_1 \geqslant ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$
$\Leftrightarrow h(x_1) \geqslant h(x_2)$
On en déduit que h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Activité 3. Variations des fonctions de référence

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Conjecturer puis démontrer le sens de variation des fonctions de référence.

1. a) Voir le logiciel ou la calculatrice.

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a)

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

b)

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		↗	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

Activité 4. Minimum et maximum d'une fonction

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Introduire la définition du maximum et du minimum d'une fonction.

1. La recette journalière est de 1 750 euros.

2. a) La recette maximale est de 5 000 euros, atteinte pour un prix de 5 euros.

b) f a pour maximum 50 car, pour tout $x \in [0 ; 10]$, on a $f(x) \leqslant f(6) = 50$.

3. Pour tout x de $[-5 ; 5]$, on a $f(x) \geqslant f(a) = 2$.

À vous de jouer ! p. 223-225

1.

x	-2		-1		0		1,5
f	-4	↗	0,8	↘	-2	↗	3

x	-1		3
g	-2	↗	6

2. 1. $D_f = [-3{,}2 ; 3]$ et $D_g = [-3{,}2 ; 2]$.

2.

x	$-3{,}2$		-2		-1		1,2		3
f	4	↘	0	↗	2	↘	1	↗	3

x	$-3{,}2$		-1		1		2
g	-2	↗	2	↘	-2	↗	4

3. 1. $[-2 ; 3]$

2. $0 < 2$ et f est croissante sur $[-1 ; 3]$ donc $f(0) < f(2)$.

3. $-2 < -1{,}5$ et f est décroissante sur $[-2 ; -1]$, donc $f(-2) > f(-1{,}5)$.

4. a) $x \in \{0{,}5 ; 3\}$ **b)** $x \in]0{,}5 ; 3[$

c) $x \in [-4 ; 0]$ **d)** $x \in]0 ; 3]$

5. a) $2^3 < 5^3$ **b)** $(-3)^3 < 11^3$ **c)** $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3 < (-2{,}4)^3$

6. a) $x \in [0\ ;\ 16[$ **b)** $x \in \,]49\ ;\ +\infty[$

7. f a pour minimum -1, atteint pour $x = 1$.

8. g admet un maximum qui vaut 2, atteint pour $x = 0$.

Exercices d'application p. 226-228

Apprendre à apprendre

9. 1. On lit sur l'axe des abscisses les intervalles où la courbe monte ; puis ceux sur lesquels la courbe descend.

2. L'axe des abscisses.

10. 1. Croissante, décroissante, constante.

2. Il suffit de regarder le signe de a.

11. 1. Voir le cours p. 221.

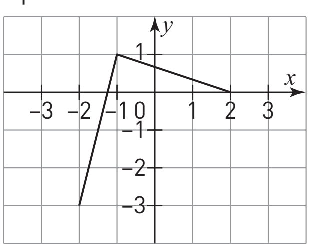
2. Voir le cours p. 221.

Questions – Flash

12. La courbe **a)** correspond au tableau ③.
La courbe **b)** correspond au tableau ②.
La courbe **c)** correspond au tableau ①.

13. a) $a = 2 > 0$ donc f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.
b) $a = 7 > 0$ donc f_2 est croissante sur $\mathbb{R}$.
c) $a = -0{,}9 < 0$ donc f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

14. Par exemple :



Dresser un tableau de variations

15.

x	-4		-1		5
f	2	↘	$-1{,}7$	↗	2

16.

x	-4		-1		1		$4{,}5$
f	2	↘	$-1{,}5$	↗	1	↘	$-1{,}5$

17.

x	-3		$-0{,}5$		4
f	2	↘	-1	↗	$1{,}5$

18. 1. f est croissante sur $[-3\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ 4]$.

2.

x	-3		0		4
f	1	↗	3	↘	-4

19. a)

x	$-2{,}5$		-1		1		$2{,}5$
f	2	↘	-1	↗	2	↘	1

b)

x	$-2{,}3$		-1		0		$2{,}5$
f	-1	↗	3	↘	0	↗	2

c)

x	$-2{,}5$		$2{,}5$
f	-1	↗	2

d)

x	$-2{,}5$		-2		-1		$-0{,}2$		$2{,}5$
f	2	↘	1	↗	$1{,}5$	↘	$0{,}5$	↗	2

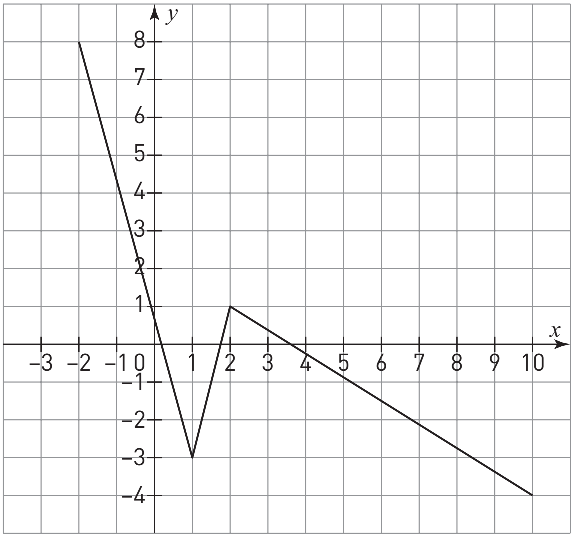
20.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		↘	-3	↗	

Interpréter un tableau de variations

21. 1. a) g est décroissante sur cet intervalle.
b) $3 < 4$ donc $g(3) > g(4)$.
2. $g(1) < g(1{,}5)$ **3.** $g(-2) > g(0)$

22. 1. Une courbe possible :



2. $x \in [0 ; 10]$ **3.** $g(3) > g(5)$

23. f est décroissante sur $[-3 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; 4]$.

24. a) f est croissante sur $[-6 ; -1]$ donc $f(-2) < f(-1)$.
b) f est décroissante sur $[-1 ; 2]$ donc $f(0) > f(2)$.
c) f est croissante sur $[2 ; 4]$ donc $f(3) \leqslant f(3{,}5)$.

25. 1. a) $f(2) > f(4)$ **b)** $f(-2) > f(-1)$
2. $x \in [-2 ; 7]$
3. $f(x) \leqslant 4$ si $x \in [-1{,}5 ; 7]$ et $f(x) > 4$ si $x \in [-2 ; -1{,}5[$.

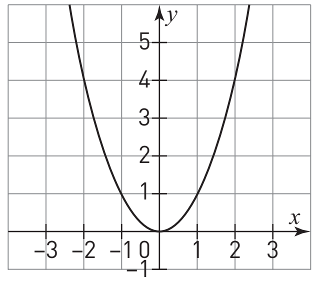
Comparer des nombres avec les fonctions de référence

26. 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a) $f(1) > f(4)$ **b)** $f(-3) > f(-2)$

27. 1.



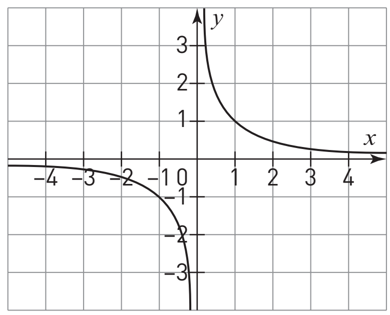
2. a) $3{,}2^2 < 3{,}5^2$ **b)** $(-2)^2 < (-2{,}4)^2$

28. 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

2. a) $f(2) > f(9)$ **b)** $f(-1) > f(-0{,}5)$

29. 1.



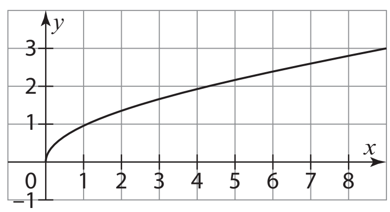
2. a) $\dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{3{,}2}$ **b)** $\dfrac{1}{-2} > \dfrac{1}{-1{,}5}$

30. 1.

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

2. a) $f(1) < f(4)$ **b)** $f\left(\dfrac{7}{2}\right) > f(3{,}2)$

31. 1.



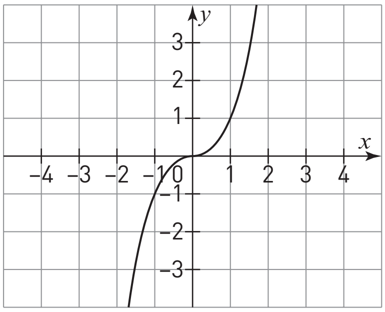
2. a) $\sqrt{3} > \sqrt{2{,}7}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{3}{2}} > \sqrt{\dfrac{4}{3}}$

32. 1.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		↗	

2. a) $f(0) < f(4)$ **b)** $f(-3) < f(2)$

33. 1.



2. a) $4{,}015^3 < 4{,}1^3$ **b)** $(-2)^3 < \left(-\sqrt{2}\right)^3$

Déterminer un maximum ou un minimum

34. 1. f admet pour maximum 6, atteint en $x = -3$; f a pour minimum -1, atteint en $x = 2$.

2. g a pour maximum 2, atteint en -2 et en 0 ; g a pour minimum $-2{,}5$ atteint pour $x = -3$.

35. 1. $D_f = [-1\ ;\ 3]$

2. f a pour maximum 1,5 atteint en 0 et en 2.

3. f a pour minimum $-0{,}5$ atteint pour -1 ; 1 et 3.

36. 1. $D_f = [-4\ ;\ 6]$

2. f a pour maximum 5 atteint pour $x = 3$.

3. f a pour minimum -2 atteint pour $x = 6$.

37. 1. $D_f = [-4\ ;\ 6]$

2. f a pour minimum -5 atteint pour $x = 6$.

3. f a pour maximum 1 atteint pour $x = 3$.

Calculs et automatismes

38. a) $(x + 1)^2 - 5 = x^2 + 2x - 4$

b) $-2(x + 1)^2 + 3 = -2x^2 - 4x + 1$

39. a) f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c) h est croissante sur $\mathbb{R}$.

40. a) $x = 3$ ou $x = -3$ **b)** $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

c) $x = -\dfrac{5}{4}$ **d)** $x = \dfrac{1}{2}$

Exercices d'entraînement p. 229-232

Courbe et tableau de variations

41. C'est la courbe ①.

42.

x	-3		-1		4		5
f	1	↗	6	↘	-3	↗	7

43. 1. $D_f = [-4\ ;\ 7]$ **2.** $-5 \leqslant f(x) \leqslant 4$ **3.** Non.

44. a)

x	-1		$-0{,}6$		$0{,}6$		2
f	$3{,}5$	↗	$4{,}7$	↘	$0{,}4$	↗	$24{,}5$

b)

x	0		6
g	-3	↗	$1{,}5$

45. a)

x	-2		$-1{,}1$		$1{,}2$		2
f	1	↗	$4{,}1$	↘	$-2{,}1$	↗	1

b)

x	0		9
g	3	↗	9

46. 1.

x	-5		$-1{,}5$		1		5
f	-40	↗	$4{,}5$	↘	$0{,}6$	↗	$62{,}6$

2. a)

x	-3		0		2		3
k	-52	↗	2	↘	-2	↗	2

b)

x	0		3		5
g	0,1	↗	1	↘	0,2

c)

x	−5		4
h	−25	↗	15

47. a) $f = u_3$ **b)** $g = u_4$
c) $h = u_2$ **d)** $k = u_1$

48.

x	−∞		4		6
f		↗	−2	↘	−6

49. 1.

x	−3		−2		0		2		3
f	2	↘	−1	↗	4	↘	−1	↗	2

2.

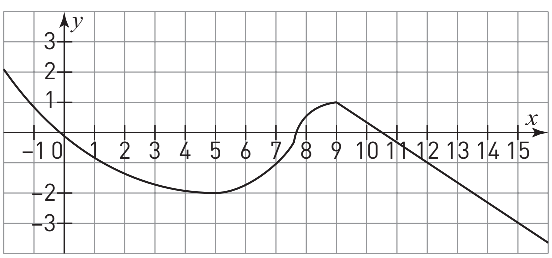
x	−5		−1		1		5
g	−1	↘	−3	↗	3	↘	1

50. Par exemple :

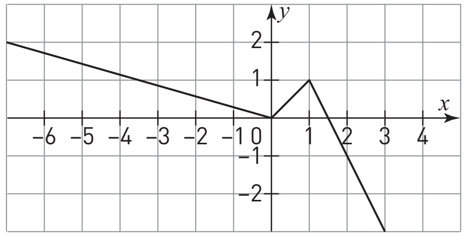
x	−3		−1		4
f	4	↗	5	↘	−1

51.

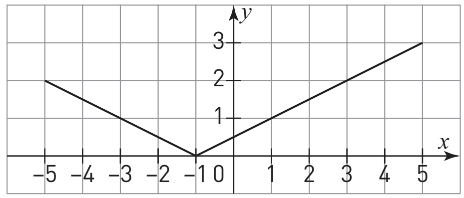
x	−∞		5		9		+∞
f		↘	−2	↗	1	↘	



52. Par exemple :



53. Par exemple :



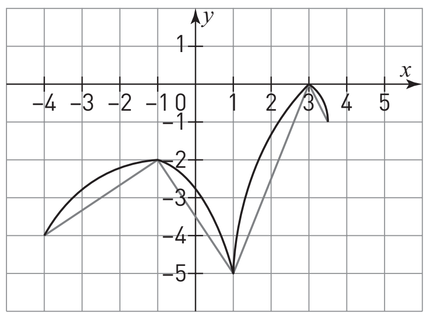
Variations et extremums

54. 1. $D_f = [-4 ; 3{,}5]$

2. f est croissante sur $[-4 ; -1]$ et sur $[1 ; 3]$ et f est décroissante sur $[-1 ; 1]$ et sur $[3 ; 3{,}5]$.

3. f a pour maximum 0 atteint en $x = 3$ et pour minimum −5 atteint en $x = 1$.

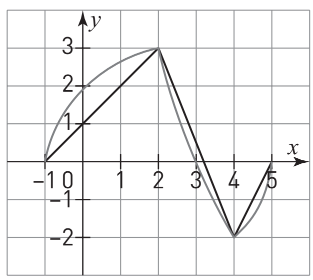
4.



55. 1.

x	−1		2		4		5
f	0	↗	3	↘	−2	↗	0

2.



3. f a pour maximum 3 atteint en $x = 2$ et f a pour minimum −2 atteint pour $x = 4$.

56. a) Chacune des fonctions représentées admet un maximum.

b)

x	$-2{,}5$		$1{,}3$		$2{,}6$
f_1			1		
	-2	↗		↘	-2

x	$-2{,}5$		-1		$-0{,}5$		$2{,}6$
f_2			1				2
	$-1{,}6$	↗		↘	$-0{,}5$	↗	

57. a) f a un minimum. **b)** On ne sait pas.
c) f a un maximum. **d)** f a un maximum.
e) f a un minimum.

58. • Pour f, $2<\frac{10}{3}$. • Pour g, $25 > 9$.

• Pour h, $-4 < -3$.

Comparer deux images

59. 1. $D_f = [-5\ ;\ 4]$ **2.** $-4 \leqslant f(x) \leqslant 3$
3. $1 \leqslant f(x) \leqslant 7$
4. a) $f(-4) \leqslant f(-3)$ **b)** On ne sait pas.

60. a) f est croissante sur $[3\ ;\ 5]$ donc l'affirmation est vraie.
b) On ne peut pas conclure car f n'est pas monotone sur $[4{,}9\ ;\ 5{,}9]$.
c) f est décroissante sur $[5\ ;\ 6]$ donc l'affirmation est fausse.
d) $f(3) = 4$ et $f(10) = 8$ donc l'affirmation est vraie.
e) f est définie sur $[3\ ;\ 10]$ donc l'affirmation est fausse.
f) Le maximum est 9, l'affirmation est fausse.
g) Le minimum est -4, l'affirmation est donc fausse.
h) Faux, $-4 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

61. a) f est décroissante sur $[-2\ ;\ 0]$ donc $f(-2) \leqslant f(-1)$.
b) f est croissante sur $[0\ ;\ 7{,}5]$ donc $f\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$.
c) On ne peut pas conclure.
d) f est croissante sur $[0\ ;\ 7{,}5]$ donc $f(3{,}6) \leqslant f(3{,}7)$.
e) f est croissante sur $[0\ ;\ 7{,}5]$ donc $f\left(\frac{3}{2}\right) \leqslant f(4)$.
f) f est croissante sur $[-10\ ;\ -2]$ donc $f(-5) \leqslant f(-3)$.

62. 1. a) $-3 \leqslant f(x) \leqslant 2$ **b)** $-3 \leqslant f(x) \leqslant 0$
2. $-3 \leqslant f(x) \leqslant 2$
3. f a pour minimum -3 et pour maximum 2.

Variations des fonctions de référence

63. 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a) $1{,}5^2 < 6^2$ **b)** $(-0{,}7)^2 > (-0{,}082)^2$
c) $(\pi - 1)^2 < 4^2 = 16$ **d)** $(-1{,}25)^2 = 1{,}25^2 < 2{,}25^2$

64. a) $3{,}5^2 < 4{,}2^2$ **b)** $(-4{,}5)^2 < (-3{,}5)^2$
c) $\pi^2 < 3{,}2^2$ **d)** $\frac{1}{5^2}<\frac{1}{3^2}$
e) $(-5)^2 > (3{,}5)^2$

65. a) $4 < x^2 < 25$ **b)** $1 < x^2 < 49$
c) $0 < x^2 < 9$ **d)** $0 < x^2 < 9$

66. 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

2. a) $-\frac{1}{2{,}05}>-\frac{1}{1{,}95}$ **b)** $\frac{1}{5+\sqrt{2}}<\frac{1}{5-\sqrt{2}}$
c) $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=0{,}5$

67. a) $\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}$ **b)** $-\frac{1}{41}<-\frac{1}{92}$
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $-\frac{1}{8}<\frac{1}{3}$

68. a) $\frac{1}{5}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{2}$ **b)** $-1<\frac{1}{x}<-\frac{1}{7}$
c) $\frac{1}{3}<x$ **d)** $-10\leqslant\frac{1}{x}\leqslant -0{,}5$

69. a) $\frac{1}{3}<x<1$ **b)** $-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}$
c) $\frac{6}{7}<x<\frac{3}{2}$ **d)** $x<-\frac{1}{2}$

70. 1.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$\nearrow$	

2. a) $2{,}5^3 < 4^3$ **b)** $(-4)^3 > (-7)^3$

c) $3{,}5^3 > 3^3 = 27$ **d)** $\left(\frac{5}{9}\right)^3 < \left(\frac{8}{7}\right)^3$

71. a) $0 \leqslant x^3 \leqslant 8$ **b)** $-1 \leqslant x^3 \leqslant 0$

c) $-27 \leqslant x^3 \leqslant 216$ **d)** $0{,}125 \leqslant x^3 \leqslant 3{,}375$

72. 1.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0 $\nearrow$	

2. a) $\sqrt{5} < \sqrt{5{,}7}$ **b)** $\sqrt{2} < \sqrt{\frac{5}{2}}$

c) $\sqrt{50} > \sqrt{49} = 7$ **d)** $\sqrt{\frac{10}{3}} > \sqrt{2{,}7}$

73. a) $x \in [4\ ;\ 9]$ **b)** $x \in]16\ ;\ 25]$

c) $x \in [0\ ;\ 81[$ **d)** $x \in]1\ ;\ +\infty[$

74. a) f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) f_2 est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) f_3 est croissante sur $\mathbb{R}$.

d) f_4 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

75. a) f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) g est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) j est décroissante sur $\mathbb{R}$.

e) m est croissante sur $\mathbb{R}$.

76. 1. $(x-4)^2 - 13 = x^2 - 8x + 16 - 13 = f(x)$

2. $f(5) = -12$ et $f(1) = -4$

3. Pour tout réel x, $(x-4)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant -13$.

4. Avec la question précédente, et avec le fait que $f(4) = -13$, f a pour minimum -13 sur $\mathbb{R}$.

5. Il est atteint pour $x = 4$.

77. 1. $-(x-3)^2 + 4 = -(x^2 - 6x + 9) + 4$

$= -x^2 + 6x - 9 + 4 = f(x)$

2. Pour tout réel x, $(x-3)^2 \geqslant 0$ donc $-(x-3)^2 \leqslant 0$ et $f(x) \leqslant 4$.

3. Par ailleurs, $f(3) = 4$ donc f a pour maximum 4, atteint pour $x = 3$.

78. 1. $f(4) = 5$

2. Pour tout réel $X \geqslant 0$, $\sqrt{X} \geqslant 0$ donc $\sqrt{4-x} \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 5$. On déduit de ce qui précède que f a pour minimum 5, atteint en $x = 4$.

79. 1. $f(1) = 3$ et $f(-3) = 11$.

2. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 2$; comme $f(0) = 2$, on déduit que f a pour minimum 2 atteint en $x = 0$.

80. $f(x) = 2x + 8$ convient.

81. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

82. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Travailler autrement

83. La distance AM est minimale si AM² est minimale.

$$\mathrm{AM}^2 = (x-3)^2 + (2x+1)^2 = 3x^2 - 2x + 10$$
$$= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{29}{3}$$

La distance est donc minimale pour le point $\mathrm{M}\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

84. $f(x) = -x + 1$ ou $f(x) = -2x$ ou $f(x) = -3x - 1$.

Exercices bilan p. 233

85. Tableaux de variations

a) f est décroissante sur $[-2\ ;\ -1{,}3]$ et sur $[0{,}5\ ;\ 2{,}5]$ et croissante sur $[-1{,}3\ ;\ 0{,}5]$.

b) g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) h est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d) k est croissante sur $[0\ ;\ 24]$.

86. Variations, comparaisons et tracés

1.

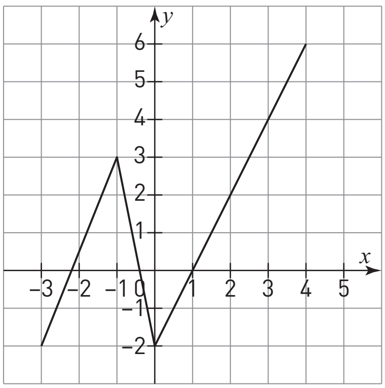
x	-3		-1		0		4
f	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6

2. Le minimum de f est -2, atteint en -3 et en 0.

3. f est croissante sur $[0 ; 4]$ donc $f(2) < f(3)$.

4. $f(-2) < f(4) = 6$

5. Par exemple :



87. Résolutions d'inéquations

1. $D_f = [-1 ; 5]$ et $D_g = [-1 ; 5]$.

2. $4 \leqslant f(x) \leqslant 6$

3. $-2 \leqslant g(x) \leqslant 4$

4. a) On ne peut pas conclure.

b) $g(-0{,}75) > g(4)$

5. $x \in [-1 ; 5]$

88. 1. $f(5) = 5 \times 30 = 150$ m^2

2. $x \in [0 ; 20]$

3. $f(x) = x \times (40 - 2x)$

4. L'aire maximale semble être de 200 m^2.

5. a) $-2(x-10)^2 + 200 = -2(x^2 - 20x + 100) + 200 = f(x)$

b) Pour tout réel x, on a $-2(x - 10)^2 \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant 200$ et $f(10) = 100$, donc f a bien pour maximum 200.

89. Vrai ou faux ?

a) Faux. **b)** Vrai.

c) Vrai. **d)** On ne peut pas conclure.

e) On ne peut pas conclure. **f)** Vrai.

g) Faux.

90. Surface maximale

1. x est la longueur d'un segment inclus dans un segment de longueur 8.

2. $BM = 10 - x$ **3.** $CN = 8 - x$

4. $\mathcal{A}_{BMN} = \dfrac{BN \times CN}{2} = \dfrac{(10-x) \times x}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}$

5. $f(x) = \mathcal{A}_{BMN} + \mathcal{A}_{PCN} = \dfrac{10x - x^2}{2} + \dfrac{8x - x^2}{2} = 9x - x^2$

6. a) $-(x - 4{,}5)^2 + 20{,}25 = -(x^2 - 9x + 20{,}25) + 20{,}25$
$= f(x)$

b) Il faut donc placer N tel que BN = 4,5 cm.

Exercices d'approfondissement

p. 234-235

91. Reconnaissance de fonctions

$f(x) = x^2$; $g(x) = 3x - 2$; $k(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = -2x + 6$.

92. Variations de la fonction carré

1. a) $a^2 \leqslant ab$ **b)** $ab \leqslant b^2$

c) $a^2 \leqslant b^2$ **d)** croissante

2. On a dans ce cas $ab \geqslant b^2$ et $a^2 \geqslant ab$ d'où $a^2 \geqslant b^2$: f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

93. Variations de la fonction inverse

1. a) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{ab} - \dfrac{a}{ab} = \dfrac{b-a}{ab}$

b) Positif. **c)** Positif.

d) On déduit de ce qui précède que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$: f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Positif. **b)** Positif.

c) On déduit de ce qui précède que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$: f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

94. Enchaînement de fonctions (1)

1. f semble croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2. a) $x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 + 4 \rightarrow \dfrac{1}{x^2 + 4}$

b) $a^2 \leqslant b^2$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$a^2 + 4 \leqslant b^2 + 4$ par addition.
$\frac{1}{a^2+4} \geqslant \frac{1}{b^2+4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $a \leqslant b \leqslant 0$.
$a^2 \geqslant b^2$ car la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
$a^2 + 4 \geqslant b^2 + 4$ par addition.
$\frac{1}{a^2+4} \leqslant \frac{1}{b^2+4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

95. Enchaînement de fonctions (2)

1. f semble croissante sur ces deux intervalles.
2. a) $-3 + \frac{1}{-x+2} = \frac{-3(-x+2)+1}{-x+2} = f(x)$
b) $x \to -x+2 \to \frac{1}{-x+2} \to \frac{1}{-x+2} - 3$
c) $a = -1 < 0$ donc elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.
d) Soit a et b tels que $2 < a \leqslant b$.
Alors $-a+2 \geqslant -b+2$ puis $\frac{1}{-a+2} \leqslant \frac{1}{-b+2}$ et $f(a) \leqslant f(b)$: f est croissante sur $]2 ; +\infty[$.
3. On démontre que f est croissante sur $]-\infty ; 2[$ par un raisonnement similaire.

96. Sûr ?

1. Faux : $f(-1{,}1) \approx 4{,}07$ et $f(-1) = 4$.
2. Faux : $f(1) = -2$ et $f(0) = 1$. **3.** Faux : $f(3) = 16$.

97. Maximum de fonction

1. Il semble que le maximum soit de 6.
2. a) $f(x) - 6 = -x^2 + 4x + 2 - 6 = -x^2 + 4x - 4$
b) On trouve que $f(x) - 6 \leqslant 0$ et $f(x) \leqslant 6$; or $f(2) = 6$ donc 6 est bien le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

98. Démontrer l'inégalité $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

1. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
2. $\sqrt{a+b}^{\,2} = a + b$ donc, comme $2\sqrt{ab} \geqslant 0$, on en déduit l'inégalité demandée.
3. On déduit de ce qui précède que $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

99. Comparer deux moyennes

1. $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \sqrt{x_1x_2}^{\,2} = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} - x_1x_2$
$= \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4}$
De plus, $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4}$
d'où l'égalité demandée.
2. $\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{x_1x_2}^{\,2}$.
3. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit que $x_A \geqslant x_G$.

100. Aire et trapèze

1. Si $x = 0$, $\mathcal{A}_{ABM} = 0$ donc l'aire de ABM est représentée en vert par une fonction f. L'aire de DCM décroît en fonction de x donc elle est représentée en rouge par une fonction g. La dernière représente l'aire de BCM, en bleu.
2. $f(x) = 4x$; $g(x) = -5x + 25$ et $h(x) = 20 + x$.
3. On en déduit que AD = 5, AB = 8 et DC = 10. Alors, avec Pythagore, DC = $\sqrt{29}$.

101. Aires

1. Si on note AM = x, l'aire de la figure est de $\frac{1}{8}\pi x^2 - \frac{3}{2}x + 9$. L'aire est décroissante sur $\left[0 ; \frac{6}{\pi}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{6}{\pi} ; 6\right]$.
2. a) L'aire est maximale pour $x = 6$, lorsque M est en B. **b)** L'aire est minimale pour AM = $\frac{6}{\pi}$.

102. Variations d'une fonction

1. $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 + 2x_2 + 3 - (x_1^2 + 2x_1 + 3)$
$= x_2^2 - x_1^2 + 2x_2 - 2x_1 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)$
2. a) Si $-1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 + 2 \geqslant 0$ donc $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$.
b) On en déduit que f est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.
3. Si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant -1$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 + 2 \leqslant 0$ donc $f(x_2) - f(x_1) \leqslant 0$. On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$.

103. Balayage

1. Il renvoie $x = 0{,}2$.

2.

```
x←1
a←7*x*x+3*x+1
b←-7*(x+0,01)*(x+0,01)+3*(x+0,01)+1
Tant que a<b :
    x←x+0,01
    a←b
    b←-7*(a+0,01)*(a+0,01)+3*(a+0,01)+1
Fin tant que
Afficher x
```

3. Il suffit d'ajouter "Afficher a" à la fin de l'algorithme.

104. Trajectoire d'une balle

1. $h(20) = 0$: la hauteur est de 0, la balle retombe au sol.

2. a) $-0{,}05(x-9)^2 + 6{,}05 = -0{,}05(x^2 - 18x + 81) + 6{,}05$
$= h(x)$

b) Il est positif.

c) $-0{,}05(x-9)^2 \leqslant 0$ donc $h(x) \leqslant 6{,}05$ et, comme $h(9) = 6{,}05$, la hauteur maximale de la balle est de 6,05 m.

Vers la 1re

105. 1. f semble décroissante sur $]-\infty\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2. $f(b) - f(a) = (b-2)^2 - (a-2)^2$
$= (b - 2 - a + 2)(b - 2 + a - 2) = (b-a)(a+b-4)$.

3. a) Il est positif.

b) On a $a + b \leqslant 2 + 2 \leqslant 4$ donc $a + b - 4 \leqslant 0$ et $f(b) - f(a) \leqslant 0$ d'où $f(b) \leqslant f(a)$.

c) On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$.

4. Dans ce cas, $a + b - 4 \geqslant 0$ et f est donc croissante sur $[2\,;+\infty[$.

5. f a donc un minimum, 0, atteint en $x = 2$.

106. 1. Le bénéfice est de $B(40) = 400$ centaines d'euros, soit de 4 000 euros.

2. $-0{,}5(x-50)^2 + 450 = -0{,}5(x^2 - 100x + 2\,500) + 450 = B(x)$

3. $-0{,}5(x-50)^2 \leqslant 0$ pour tout x, d'où $B(x) \leqslant 450$. De plus, $B(50) = 450$. On en déduit que le bénéfice maximal est de 45 000 euros atteint pour 5 000 tee-shirts fabriqués et vendus.

Travaux pratiques p. 236-237

TP 1. Roméo et Juliette

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Optimiser une trajectoire par différentes méthodes.

A. 1. Voir le logiciel de géométrie dynamique.

2. Lorsque C se déplace de A vers B, cette distance diminue puis augmente.

3. Il semble que ce soit le cas pour AC = 1,7.

B. 1. $D_f = [0\,;6]$

2. $f(x) = \sqrt{4+x^2} + \sqrt{25+(6-x)^2}$
$= \sqrt{4+x^2} + \sqrt{56-12x+x^2}$

3. On doit avoir $x = AC \approx 1{,}71$.

4. On trouve un résultat plus précis.

C. 1. Voir le logiciel de géométrie dynamique.

2. Par symétrie, RI = R'I d'où RI + IJ = R'I + IJ.

3. Le chemin le plus court est en ligne droite.

4. Le théorème de Thalès.

5. $AC = \dfrac{12}{7}$

On retrouve les approximations précédentes.

TP 2. Pour construire une salle de spectacle

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Optimiser une aire par balayage.

A. 1. Voir le logiciel de géométrie dynamique.

2. Il semble que I soit alors tel que OI = 3,5.

B. 1. [OI] est un segment inclus dans un segment de longueur 5.

2. Avec le théorème, Pythagore, $IL = \sqrt{25-x^2}$.

3. $\mathscr{A}_{IJKL} = IL \times IJ = 2x\sqrt{1-x^2}$.

4.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	0	5	9,8	14,3	18,3	21,6

x	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	24	25	24	19,6	0

5. Voir la calculatrice.

6. L'aire maximale est d'environ 25, atteinte pour $x \approx 3{,}6$.

C. 1. Voir la calculatrice.

2. L'aire maximale est de 25, atteinte pour $x \approx 3{,}53$.

3. L'aire maximale est de 25, atteinte pour $x \approx 3{,}537$.

En autonomie p. 238-239

Décrire des variations de fonctions

107. b et **c** **108. a**

109. 1.

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

2.

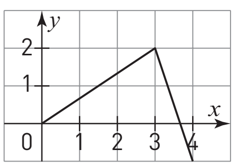
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

110.

x	-3		-2		2		4
f	-1	↗	2	↘	-1	↗	1

x	-4		4
g	-3	↗	2

111. Par exemple :



112. a) f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.

b) g est la fonction carré, décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c) h est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.

113. Le maximum est 2,5.

Utiliser les variations de fonctions

114. a et **c** **115. a** et **d** **116. b** **117. c**

118. 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a) $2{,}5^2 < 2{,}5015^2$ **b)** $(-3{,}1)^2 > (-2{,}75)^2$

3. a) $x^2 \in [1\ ;\ 16]$ **b)** $x^2 \in [0\ ;\ 4]$

119. a) $\sqrt{x} \in \left[1 ; \sqrt{3}\right]$ **b)** $\sqrt{x} \in \left]\sqrt{2}\,; +\infty\right[$

c) $\sqrt{x} \in \left]0\,; \sqrt{3}\right]$.

Déterminer un minimum ou un maximum

120. a **121. a** et **c** **122. b** **123. b** et **c**

124. Le maximum est 3, atteint pour $x = 1$; le minimum est -4, atteint pour $x = 2$.

125. Le maximum et le minimum de f sont 2.

126. 1. Le maximum de f est 3, atteint en $x = 5$.

2. Le minimum est de -3.

127. 1. g a un maximum qui vaut 5, atteint en $x = 3$ et $x = 7$.

2. g a un minimum qui vaut -2, atteint en $x = 6$ et $x = 7{,}5$.

128. Elle admet seulement un minimum, en $x = 0$.

129. Elle admet seulement un minimum, en $x = 0$.

130. Elle n'a ni minimum, ni maximum.

131. Elle n'a ni minimum, ni maximum.

132. $2\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant -3 = f(0)$.

133. 1. $-2(x-1)^2 + 3 = -2(x^2 - 2x + 1) + 3$

$= -2x^2 + 4x + 1 = f(x)$

2. $f(1) = 3$, et pour tout réel x, $-2(x-1)^2 \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant f(1)$.

3. Ce maximum est atteint pour $x = 1$.

CHAPITRE 10 Signe d'une fonction et inéquations

Manuel p. 240-265

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre s'appuie sur les méthodes de résolutions d'inéquations, graphiques ou algébriques étudiées dans les chapitres 3 (inéquations du 1er degré, intervalles), chapitre 4 (identités remarquables, équations produit) et chapitre 8 (lectures d'images et d'antécédents, calculs d'image et d'antécédents, résolutions graphiques des équations du type $f(x) = k$ ou $f(x) = g(x)$ et des inéquations du type $f(x) < k$ ou $f(x) < g(x)$).

Signe d'une fonction : présentation du signe d'une fonction sous forme de tableau de signe. Sa détermination est d'abord obtenue par lecture graphique. La connaissance du signe des fonctions affines permet ensuite de déterminer le signe de produits ou de quotients.

Résolution de problèmes : toute inéquation peut se ramener à une étude de signe. L'étude de signe couplée à des éventuelles transformations algébriques permet d'aborder la résolution de nombreux problèmes.

Ce chapitre prépare les études de fonctions qui seront faites en première, spécialité ou technologique, en lien avec la dérivée d'une fonction.

Capacités

- → **Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.**
- → **Déterminer algébriquement le signe d'une fonction affine, d'un produit, d'un quotient.**
- → **Interpréter un tableau de signe pour résoudre une inéquation.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 241

1. Résoudre des équations

a) $x = \dfrac{3}{2}$ **b)** $x = -5$ **c)** $x = 4{,}5$

2. Résoudre des inéquations

a) $x \in \left[\dfrac{5}{4} ; +\infty\right[$ **b)** $x \in \left]\dfrac{13}{3} ; +\infty\right[$

3. Factoriser des expressions en utilisant les identités remarquables

a) $(x - 1)^2$ **b)** $(5x + 6)^2$

c) $(7x - 8)(7x + 8)$ **d)** $(x - 5)(x + 1)$

4. Factoriser des expressions en utilisant un facteur commun

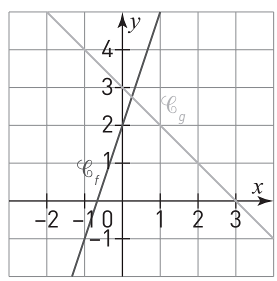
a) $4(x - 2)$ **b)** $x(7x - 2)$

c) $(2 - x)(x + 1)$ **d)** $(3x - 4)(7x + 4)$

5. Réduire au même dénominateur

$A(x) = \dfrac{-3x - 1}{2(x + 1)}$ et $B(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 9}{(x + 3)(-x + 1)}$

6. Représenter graphiquement des fonctions



7. Interpréter la courbe d'une fonction

1. (d_1) représente g et (d_2) représente f.

2. $x \in [2 ; +\infty[$ et $x \in]8 ; +\infty[$

3. Voir le graphique.

Activités p. 242-243

Activité 1. Tableaux de signes

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Définir le signe d'une fonction et introduire le tableau de signe.

1. a) $x = -2$ **b)** $x \in [-3\ ;-2[$ **c)** $x \in]-2\ ;2]$

d) $f(x)$ est strictement positif si $x \in [-3\ ;-2[$.

$f(x)$ est nul si $x = -2$.

$f(x)$ est strictement négatif si $x \in]-2\ ;2]$.

e)

x	-3		-2		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2.

x	-3		-1		1		2
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		2
$h(x)$		$+$	

Activité 2. Signes et viennoiseries

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Étudier le signe d'une fonction affine.

1. Chaque viennoiserie coûte 0,8 euro, donc $R(x) = 4 - 0{,}8 \times x = 4 - 0{,}8x$.

2.

```
Saisir x
f←0,8*x+4
Si f>0
     Afficher "f(x) est positif"
Sinon
     Afficher "f(x) est négatif"
```

3. a) $x = 5$ **b)** $x \in]-\infty\ ;5[$

c)

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4. Au bout de 6 jours.

5.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Activité 3. Signes à déterminer

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Introduire l'étude de signe d'un produit et d'un quotient.

1.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3. $f(1) \times g(1) > 0$ et $\dfrac{f(2)}{g(2)} < 0$.

4. a) Ils doivent être du m ême signe.

b)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. a) Elle n'est pas définie pour $x = -\dfrac{5}{2}$.

b)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Activité 4. Résolution d'inéquation et lecture graphique

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Introduire une méthode générale pour la résolution d'inéquations.

1. Non.

2. $x + 2$ peut être négatif : il ne raisonne pas par équivalence.

3. Les solutions semblent être : $x \in]-\infty\ ;-2[\cup]-1\ ;+\infty[$.

4. a) $\dfrac{4}{x+2} < 4 \Leftrightarrow \dfrac{4-4(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x-4}{x+2} < 0$

b) À l'aide du tableau de signes de $\dfrac{-4x-4}{x+2}$, on voit que les solutions sont les nombres de $]-\infty\ ;-2[\cup]-1\ ;+\infty[$.

À vous de jouer ! p. 248-251

1.

x	-2		-1		3		4
$f(x)$		+	0	+	0	−	

x	-3		-2		2		3
$g(x)$		−	0	+	0	−	

2. a)

x	-1		3
$f(x)$		−	

b)

x	-3		$-1{,}5$		1		2
$f(x)$	0	+	0	−	0	+	

3. 1. a) $x = -\dfrac{3}{5}$

b) f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		$-\dfrac{3}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

2. a) $x = 3{,}5$

b) g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		$3{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

4. 1. a) $f(x) = 0$ si $x = -3$ et $f(x) > 0$ si $x < -3$.

b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	

2. $g(x) = 0$ si $x = \dfrac{1}{3}$ et $g(x) > 0$ si $x > \dfrac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

5. 1.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$2x + 1$		−	0	+	

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x - 1$		+	0	−	

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{5}$		$+\infty$
$5x + 2$		−	0	+	

2. a)

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		+	0	−	

b)

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$B(x)$		−	0	+	0	−	

c)

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		−	0	+	‖	−	

d)

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$-\dfrac{2}{5}$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$D(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

6. a)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		−	0	+		+	
$-3x + 6$		+		+	0	−	
$x(-3x + 6)$		−	0	+	0	−	

b)

x	$-\infty$		-7		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$-3 + 4x$		−		−	0	+	
$7 + x$		−	0	+		+	
$2(-3 + 4x)(7 + x)$		+	0	−	0	+	

c)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-3x$		+	0	−		−	
$-4x + 4$		+		+	0	−	
$-3x(-4x + 4)$		+	0	−	0	+	

7. a)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\dfrac{1}{4x+8}$		$-$	‖	$+$	

b)

x	$-\infty$		-9		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$9+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+2}{9+x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$-\dfrac{6}{7}$		0		$+\infty$
$7x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$\dfrac{7x+6}{x^2}$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

8. a)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$5x+10$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x+10)(-3x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-6		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
$(2x+4)(-x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$-\dfrac{7}{6}$		$\dfrac{5}{4}$		18		$+\infty$
$-4x+5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$6x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-0{,}5x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(-4x+5)(6x+7)$ $(-0{,}5x+9)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

9. a)

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x(x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		0		$\dfrac{2}{5}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{5x-2}{-x}$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-60		4		$+\infty$
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$6+0{,}1x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{4-x}{6+0{,}1x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

10. a) $x \in]-\infty\,;-2[\, \cup\,]-0{,}2\,;+\infty[$

b) $x \in \left[0\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$

c) $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{6}\right[$

d) $x \in \left]\dfrac{-7}{6}\,;\,\dfrac{5}{7}\right[\cup\,]3\,;+\infty[$

11. a) $x \in]-\infty\,;-3[\, \cup\, [0\,;+\infty[$

b) $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{4}{3}\right[\cup\,]0\,;+\infty[$

Exercices d'application p. 252-254

Apprendre à apprendre

12. Il faut repérer sur quel intervalle la courbe est située au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses, faire apparaître ces intervalles dans la première ligne avant de compléter la seconde avec des – et des +, sans oublier les 0.

13. Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

Si $a = 0$ et $b > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	

Si $a = 0$ et $b < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	

14. Il faut d'abord étudier le signe de $2x + 1$ et de $-3x + 8$, puis celui de leur produit avant de lire les solutions de l'inéquation dans le tableau de signe.

Questions – Flash

15. a) $f(0)$ est strictement négatif.

b) $f(4)$ est strictement positif.

c) $f(3)$ est nul.

d) $f(-4)$ n'existe pas.

16. a)

x	$-\infty$		4,5		$+\infty$
$2x - 9$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{11}$		$+\infty$
$-11x - 5$		$+$	0	$-$	

17.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x + 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

18. $f(0) = 8$ et $f(4) = -8$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x + 8$		$+$	0	$-$	

Lire le signe d'une fonction

19.

x	-2		$-1{,}6$		1		4		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		-1		4
$g(x)$		$+$	0	$+$	0

20.

x	-2		$-0{,}8$		0,8		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	-3		2
$g(x)$		$+$	

21.

x	-5		-2		0		5		8
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

22. a)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$-1{,}5$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		0,5		1,25		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$-2{,}5$		$-0{,}5$		2		$+\infty$
$m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer le signe d'une fonction affine

23. a)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x + 4$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$8x - 5$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$+\infty$
$-7x-2$		$+$	0	$-$	

24. a)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$	

25. Par exemple : $f(x) = x - 2$ et $g(x) = 6 - 2x$.

26. a)

x	$-\infty$		$-\frac{7}{9}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		-24		$+\infty$
$m(x)$		$+$	0	$-$	

27. a)

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{72}{35}$		$+\infty$
$m(x)$		$-$	0	$+$	

Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

28. a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^4		$+$	0	$+$	
x^4+1		$+$		$+$	

d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	

29. 1.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Le signe est conforme.

30. a)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		+		+	0	−	
$-3x-5$		+	0	−		−	
$h(x)$		+	0	−	0	+	

b)

x	$-\infty$		-7		-4		$+\infty$
$2x+14$		−	0	+		+	
$6x+24$		−		−	0	+	
$u(x)$		+	0	−	0	+	

c)

x	$-\infty$		$3{,}5$		13		$+\infty$
$5x-65$		−		−	0	+	
$7-2x$		+	0	−		−	
$v(x)$		−	0	+	0	−	

d)

x	$-\infty$		-24		$+\infty$
$-3x-72$		+	0	−	
$-4x-96$		+	0	−	
$w(x)$		+	0	+	

31. a)

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\frac{x+2}{-x^3}$		−	0	+	‖	−	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\frac{2x+3}{6x-4}$		+	0	−	‖	+	

c)

x	$-\infty$		-3		$3{,}5$		$+\infty$
$\frac{-3x-9}{-2x+7}$		+	0	−	‖	+	

d)

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$\frac{x}{8-x}$		−	0	+	‖	−	

32. a)

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$\frac{6}{-2x-1}$		+	‖	−	

b)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$\frac{x+2}{3-x}$		−	0	+	‖	−	

c)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{-7x+14}{3x}$		−	‖	+	0	−	

d)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{x}{6-3x}$		−	0	+	‖	−	

33. a)

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	

b)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	0	−	

34. 1.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		−	0	+	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		−	0	+	

2. a)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
O		+	0	−	‖	+	

b)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
L		−	0	+	‖	−	

c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
S		+	0	−	‖	+	

35. 1.

x	$-\infty$		-7		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	0	+	

2. a)

x	$-\infty$		-7		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	0	−	

b)

x	$-\infty$		-7		0		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$h(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

c)

x	$-\infty$		-7		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$k(x)$		−	0	+	0	−	

d)

x	$-\infty$		-7		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$t(x)$		−	0	+	0	−	

e)

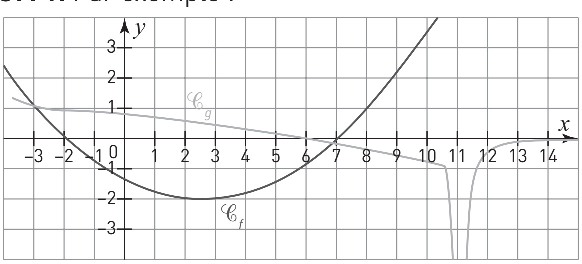
x	$-\infty$		-7		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$p(x)$		+	0	−	0	+	

Résoudre une équation ou une inéquation à l'aide d'une étude de signe

36. a) $x = -5$ ou $x = 1$ **b)** $x \in]-5\ ;\ 1[$

c) $x \in]-\infty\ ;\ -5] \cup [1\ ;\ 2[$ **d)** $x \in]-\infty\ ;\ -5[\cup]1\ ;\ 2[$

37. 1. Par exemple :



2. a) $x \in]-\infty\ ;\ -5] \cup [7\ ;\ +\infty[$ **b)** $x \in]6\ ;\ 11[\cup]11\ ;\ +\infty[$

3. On a $f(x) > g(x)$ pour $x \in [7\ ;\ +\infty[$ et $f(x) < g(x)$ pour $x \in [-2\ ;\ 6]$.

38. 1.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(-2x+3)$		−	0	+	0	−	

2. $x \in \left]\frac{3}{2}\ ;\ 2\right[$

39. a) $x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{9}\right[\cup]4\ ;\ +\infty[$

b) $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{2}{3}\right] \cup [2\ ;\ +\infty[$

c) $x \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]2\ ;\ +\infty[$ **d)** $x \in]-3\ ;\ 3[$

40. a) $x \in \left]-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ **b)** $x \in]-8\ ;\ 0]$

c) $x \in]-\infty\ ;\ -2[\cup]-1\ ;\ +\infty[$ **d)** $x \in \left]-\frac{7}{3}\ ;\ -\frac{8}{5}\right[$

41. a) $x \in]-\infty\ ;\ -2[$

b) $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{3}{8}\ ;\ +\infty\right[$

c) $x \in]-0{,}5\ ;\ 0[\cup]1\ ;\ +\infty[$

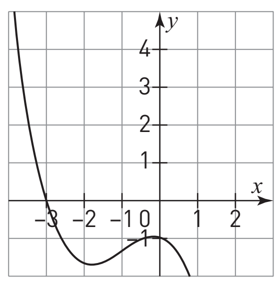
Interpréter un tableau de signes

42. 1. a) négatif **b)** négatif **c)** positif

2. a) $x \in]-\infty\ ;\ -3[$ **b)** $x \in]-\infty\ ;\ -3]$

c) $x \in]-3\ ;\ +\infty[$

3. Par exemple :

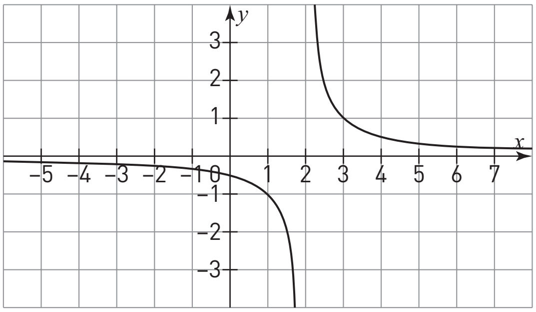


43. 1. a) positif **b)** négatif **c)** négatif

2. a) $x \in]2\ ;\ +\infty[$ **b)** $x \in]2\ ;\ +\infty[$

c) $x \in]-\infty\ ;\ 2[$

3. Par exemple :



Calculs et automatismes

44. a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{16}{5}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** -19 **e)** $2\sqrt{2}$

45. a) $x = -3$ **b)** $x = -\frac{7}{2}$ **c)** $x \in]-0,5\ ;+\infty[$

46. a) $(x-2)(x+2)$ **b)** $x(-3x-5)$ **c)** $-x(x+1)$

47. a)

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$x+6$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	

Exercices d'entraînement p. 255-257

Interpréter un tableau de signes

48. 1.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

2. a) positif **b)** négatif

49. a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

b)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

50. a) $f(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{9}{7}$

b)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

51. a)

x	$-\infty$		-11		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		1		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

52. a) $V = \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
V		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

b) $I = \frac{2x+4}{2x-1}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
I		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

c) $T = \frac{11x+20}{x(3x+5)}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{20}{11}$		0		$+\infty$
T		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

d) $E = \dfrac{-9x+3}{(1-5x)(x+1)}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
E		$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

53. a)

x	$-\infty$		-12		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	‖	$+$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	

e)

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$\frac{1}{9}$		1		$+\infty$
$m(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

f)

x	$-\infty$		$-\frac{8}{7}$		0		6		$+\infty$
$p(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

54. a)

x	$-\infty$		$\frac{1}{8}$		$\frac{2}{7}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{9}$		4		5		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

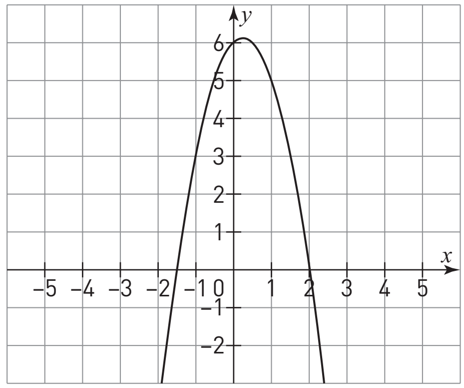
55. 1. La droite bleue représente f, la rouge représente g.

2. $x = -1{,}5$ ou $x = 2$. **3.** $x \in [-1{,}5 ; 2]$

4.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Par exemple :



56. $f = u_5 u_4$; $g = u_3 u_5$ et $h = u_1 u_3$.

Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signes

57. a) $x \in]-\infty ; -4[\cup]4 ; +\infty[$

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

c) $x \in \left]-\infty ; -\frac{11}{8}\right[\cup \left]\frac{11}{8} ; +\infty\right[$

d) $x \in]-\infty ; -10] \cup [4 ; +\infty[$

58. a) $x \in \left]-2 ; \frac{1}{4}\right[$ **b)** $x \in \left]0 ; \frac{1}{5}\right]$

c) $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{8}\right[\cup \left]-\frac{1}{8} ; \frac{3}{7}\right[$

59. a) $x \in]-2 ; +\infty[$ **b)** $x \in \left[-\frac{2}{5} ; -\frac{3}{11}\right]$

60. a) $x \in [4 ; 7[$ **b)** $x \in \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[\cup \left[-\frac{13}{10} ; +\infty\right[$

c) $x \in \left]-\infty ; \frac{3}{7}\right[\cup \left]\frac{6}{7} ; +\infty\right[$

61.

x	-4		-1		1
$f(x)$		$+$	0	$+$	

x	-7		3		9
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Inéquations et fonctions de référence

62. 1. Cela est dû au fait que $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$.

2.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$(x-3)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. $x \in]-3\,;3[$. Voir la représentation graphique de la fonction carré.

63. a) $x \in]-\infty\,;2] \cup [2\,;+\infty[$ **b)** $x \in \left[-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\right]$

c) $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;+\infty\right[$

64. a) $x \in \left]-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right[$ **b)** $x \in \mathbb{R}$

65. 1. $2^3 = 8$

2.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$		$\nearrow$	

3. $x \in]-\infty\,;2]$

4. Voir la représentation graphique de la fonction cube.

66. a) $x \in]-\infty\,;1[$ **b)** $x \in [4\,;+\infty[$ **c)** $x \in]-2\,;+\infty[$

67. a) $x \in \mathbb{R}_+^*$ **b)** $x \in]-\infty\,;-1[$

68. 1. $\dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{1-2x}{x}$ d'où l'équivalence entre les deux inéquations.

2.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\dfrac{1-2x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

3. $x \in \left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$. Voir la représentatoin graphique de la fonction inverse.

69. a) $x \in]-\infty\,;0[\cup \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

b) $x \in]-\infty\,;-1] \cup]0;+\infty[$

c) $x \in \left]0\,;\dfrac{3}{2}\right]$

70. a) $x \in \left]-\infty\,;\dfrac{1}{4}\right[$ **b)** $x \in \left]-\dfrac{1}{8}\,;0\right[$

71. 1. $x = 4$.

2. Elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. $x \in [0\,;4]$

4. Voir la representation graphique de la fonction racine carrée.

72. a) $x \in [0\,;9[$ **b)** $x \in \left]\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$ **c)** $x \in [625\,;+\infty[$

Positions relatives

73. 1. a) $x^2 - x = x(x-1)$

b)

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$	0	$-$	0	$+$	

c) $x \in [1\,;+\infty[$.

2. $x \in [1\,;+\infty[$.

3. Si $x \in]0\,;1[$, on a $x^3 < x^2 < x$.

Si $x > 1$, on a $x < x^2 < x^3$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$, on a $x = x^2 = x^3$.

Cela permet de conclure.

74. 1. $f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x + 1$

2. $f(x) - g(x) = (2x+1)^2$

3. $(2x+1)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant g(x)$.

4. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Résoudre des problèmes

75. A. 1. Il est de 2,3 euros.

2. $R(x) = 0{,}3 \times (10x) = 3x$

3. $x \in [4 ; 9]$

B. 1. $B(x) = 3x - (x^2 - 8x + 18) = -x^2 + 11x - 18$

2. $(2 - x)(x - 9) = -x^2 + 9x + 2x - 18 = -x^2 + 11x - 18$

3. On retrouve le résultat précédent à l'aide d'une étude de signe.

76. 1. $f(x) > d(x)$

2. $f(x) - d(x) = 250 \times \dfrac{3x^2 - 40x - 2\,000}{x}$ d'où l'équivalence entre les inéquations.

3. a) $(x + 20)(3x - 100) = 3x^2 - 100x + 60x - 2\,000$
$= 3x^2 - 40x - 2\,000$

b) Avec une étude de signe, on trouve $x \in \left[\dfrac{100}{3} ; 50\right]$.

c) L'offre est supérieure à la demande pour un prix compris entre 33,33 euros et 50 euros.

Travailler autrement

77. $b = -1$ et $c = 2$.

78. $f(x)$ est strictement positif pour tout réel x.

Exercices bilan p. 258

79. Courbe et signe d'une fonction

1.

x	$-\infty$		$-6{,}5$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

2. a) $(x - 1)(0{,}3x + 2) = 0{,}3x^2 + 2x - 0{,}3x - 2 = f(x)$

b)

x	$-\infty$		$-\dfrac{20}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

80. Mise en forme et étude de deux fonctions

1. a) $f(x) = x(3x - 4)$

b)

x	$-\infty$		0		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

c) $x \in\ ]-\infty ; 0[\cup \left]\dfrac{4}{3} ; +\infty\right[$

2. a) $g(x) = \dfrac{4 - 3x}{x(4 - x)}$

b)

x	$-\infty$		0		$\dfrac{4}{3}$		4		$+\infty$
$g(x)$		−	‖	+	0	−	0	+	

c) $x \in\ ]-\infty ; 0[\cup \left[\dfrac{4}{3} ; 4\right]$

81. Inéquation et étude de signe

1. -2

2. L'inéquation revient à $\dfrac{-3x - 4}{x + 2} \geqslant 0$.

3. $x \in \left]-2 ; -\dfrac{4}{3}\right]$

82. Résolution graphique et par le calcul

1. a) $x \in\ ]-\infty ; 1{,}5] \cup\ ]3 ; +\infty[$

b) $x \in\ ]0 ; 3[\cup\ ]4 ; +\infty[$

2. $f(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{-2x - 3}{x - 3} \leqslant 0$; avec une étude de signe, on retrouve les solutions de la question **1. a)**.

$f(x) > -x \Leftrightarrow \dfrac{x(x - 4)}{x - 3} > 0$; avec une étude de signe, on retrouve les solutions de la question **1. b)**.

83. Extremum d'une fonction

1. On trouve :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. f semble avoir un minimum, qui vaut -1.

3. $f(x) + 1 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geqslant 0$

4. On déduit de ce qui précède que $f(x) \geqslant f(2) = -1$ pour tout réel x, ce qui permet de conclure.

84. Deux tableaux sans courbe

x	-2		-1		3
$f(x)$		+	0	−	

85. Le potager de Khadija

A. 1. MQ = $x - 6$

2. a) AB × AD = 300 d'où AB = $\dfrac{300}{\text{AD}} = \dfrac{300}{x}$.

b) MN = $\dfrac{300}{x} - 6$

3. $S(x) = \text{MQ} \times \text{MN} = (x-6)\left(\dfrac{300}{x} - 6\right)$

$$= 336 - 6x - \frac{1\,800}{x}$$

B. 1. $S(x) - 63 = \dfrac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x}$

d'où l'équivalence demandée.

2. $-3(x-8)(2x-75) = -3(2x^2 - 91x + 600)$
$= -6x^2 + 273x - 1\,800$

3.

x	$-\infty$		0		8		75		$+\infty$
$\dfrac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. $x \in [8\ ;\ 50]$

Exercices d'approfondissement p. 259-261

86. Ensembles de définition

a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\ ;\ 2\}$
b) $D_g =]-\infty\ ;\ 5]$
c) $D_h = \mathbb{R}$
d) $D_k = \mathbb{R}$
e) $D_m = [-3\ ;\ 3]$
f) $D_n =]-3\ ;\ +\infty[$

87. Au 3e degré

$x \in]0\ ;\ 1{,}5[\cup]1{,}5\ ;\ +\infty[$

88. Trois fonctions

1. a) $g(x) - f(x) = -x^2 + 8{,}3x - 9{,}1$

b)

x	$-\infty$		$1{,}3$		7		$+\infty$
$1{,}3 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(1{,}3 + x)(x - 7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ se croisent en $x = 1{,}3$ et en $x = 7$, que $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]1{,}3\ ;\ 7[$ et en dessous sinon.

2. a) $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_f$ se croisent en $x = -2$, en $x = 0$ et en $x = 7$: $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $]-2\ ;\ 0[$ et sur $]7\ ;\ +\infty[$ et en dessous sinon.

b) $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se croisent en $x = 1$ et en $x = 7$: $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_h$ sur $]1\ ;\ 7[$ et en dessous sinon.

89. Variations d'une fonction (1)

1. Il semble que f soit décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$ et décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$.

2. $f(b) - f(a) = \dfrac{2b+1}{b-2} - \dfrac{2a+1}{a-2}$

$$= \frac{(2b+1)(a-2) - (2a+1)(b-2)}{(a-2)(b-2)}$$

$$= \frac{5(a-b)}{(a-2)(b-2)}$$

3. On $a - b < 0$; $a - 2 > 0$ et $b - 2 > 0$ donc $f(b) - f(a) < 0$.

4. On peut en déduire que f est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$. On montrerait de même que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

90. Variations d'une fonction (2)

1. Si $5 < a < b$, alors $f(b) - f(a) = \dfrac{3(b-a)(a+b-10)}{(b-5)^2(a-5)^2} > 0$

donc f est strictement croissante sur $]5\ ;\ +\infty[$.

2. $g(b) - g(a) = \left(\dfrac{2}{ab} + 3\right)(b-a) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

91. Fonction inverse

1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

2. Par exemple : $f(x) = x - 3$.

3. Par exemple : $g(x) = \dfrac{-x+5}{x+1}$.

92. Égalité et étude de signe

1. $(x-3)^2 - 16 = x^2 - 6x + 9 - 16 = x^2 - 6x - 7$

2. $T(x) = (x-3)^2 - 16 = (x-7)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$T(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

93. Positions relatives

1. $x^2 - x = x(x - 1)$

x	0		1		$+\infty$
$x^2 - x$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2 = x$ si $x = 0$ ou $x = 1$; $x^2 > x$ si $x > 1$ et $x^2 < x$ si $x \in \,]0\,;\,1[$.

2. $\left(x - \sqrt{x}\right)\left(x + \sqrt{x}\right) = x^2 - x$ d'où l'égalité demandée.

3. On déduit de la question **1.** le tableau de signes suivant.

x	0		1		$+\infty$
$x^2 - x$	0	$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que $x = \sqrt{x}$ si $x = 0$ ou $x = 1$; $x > \sqrt{x}$ si $x > 1$ et $x < \sqrt{x}$ si $x \in \,]0\,;\,1[$.

94. Calcul formel (1)

L'inéquation revient à $x(x^2 - 2) > 0$, d'où
$x \in \left]-\sqrt{2}\,;0\right[\cup \left]\sqrt{2}\,;+\infty\right[$ avec une étude de signe.

95. Fonctions convexe et concave

A. 1. a) $n(x) = 3x - 2$

b) $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$

c) $x^2 - n(x) = (x - 1)(x + 2)$. Par une étude de signe, on montre que $x^2 - n(x) \geqslant 0$ si $x \in [1\,;\,2]$. On en déduit que (AB) est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur cet intervalle.

2. (AB) a pour équation $y = 1$.
Alors $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Par une étude de signe, on montre que $x^2 - 1 \geqslant 0$ si $x \in [-1\,;\,1]$. On en déduit que [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur cet intervalle.

B. 1. $A(a\,;\,a^2)$ et $B(b\,;\,b^2)$.

2. $a \leqslant x \leqslant b$

3. $f(x) = (a + b)x - ab$

4. $(a + b)x - ab \geqslant x^2$

5. $(x - a)(x - b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a + b)x + ab.$

6.

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$x^2 - f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. On en déduit que $x^2 \leqslant f(x)$ sur cet intervalle.

C. 1. g semble concave sur $]3\,;\,+\infty[$ et convexe sur $]-\infty\,;\,3[$.

2. a) Il est positif car h est croissante sur $]-\infty\,;\,3[$.

b) Cela dépend de a et de b.

3. Il faut résoudre :
$$-\frac{x}{x-3} < \frac{3}{(a-3)(b-3)}x - \frac{ab}{(a-3)(b-3)}.$$

4. En remarquant que $a - 3 < 0$; $b - 3 < 0$ et $x - 3 < 0$, on retrouve l'inéquation.

5. Les deux termes de l'égalité sont égaux à $3x^2 - 3ax - 3bx + 3ab$.

6.

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$3(x - a)\,(x - b)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

g est donc convexe sur $]-\infty\,;\,3[$.

96. Courbes représentatives

1. a) La courbe en bleu représente f, celle en rouge représente g.

b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent se croiser en $x = 2$, et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

2. a) $f(x) - g(x) = 2x^2 - 8x + 8$

b) $f(x) - g(x) = 2(x - 2)^2$

c) On retrouve que $f(x) = g(x)$ si $x = 2$ et que, pour tout réel $f(x) \geqslant g(x)$, d'où le résultat de la question **1. b)**.

97. Calcul formel (2)

$$f(x) - g(x) = -2x^2 + 3x + 2 = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se croisent en $x = 2$ et en $x = -\dfrac{1}{2}$; $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;2\right]$ et en dessous sinon.

98. À la recherche d'une expression

1.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$(x - 2)^2$		$+$	0	$+$	

2. a) Par exemple : $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$.

b) Par exemple : $f(x) = (-3 - x)(x - 2)^2$.

c) Par exemple : $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2$.

d) Par exemple : $f(x) = (x - 6)(x + 3)^2$.

99. Positions relatives (2)

1. $f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

2. $f(x) - g(x) \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Vers la 1re

100. A. 1.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $x \in]-\infty\,;0] \cup [2\,;+\infty[$

B. 1.

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$X - X^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $X \in]0\,;1[$

C. 1. On pose $X = \sqrt{x^2 - 2x}$; l'équation revient à $X < X^2$.

2. On doit avoir $0 < \sqrt{x^2 - 2x} < 1$.

D. 1. $\sqrt{x^2 - 2x} + 1 > 0$, donc les deux inéquations sont équivalentes.

2. En développant le terme de gauche, on trouve $x^2 - 2x - 1 > 0$.

E. 1. Les solutions semblent être les nombres de $]-\infty\,;-0{,}4[\cup]2{,}4\,;+\infty[$.

2. $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right) = x^2 - 2x - 2$

3. $x \in \left]-\infty\,;1 - \sqrt{2}\right[\cup \left]1 + \sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

4. $x \in \left]-\infty\,;1 - \sqrt{2}\right[\cup \left]1 + \sqrt{2}\,;+\infty\right[$

101. 1. $x \in [0\,;20]$

2. $C(5) = 3\,780$
Le coût est de 3 780 euros.

3. a) Elle est de 3 000 euros.

b) $R(x) = 600x$

4. a) Une perte de 780 euros est réalisée.

b) $B(x) = R(x) - C(x) = -30x^2 + 750x - 3\,780$

5. $30(x - 7)(18 - x) = 30(-x^2 + 25x - 126) = B(x)$

6. $x \in [7\,;18]$

Travaux pratiques p. 262-263

TP 1. Pour rassembler des vaches

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Résoudre un problème à l'aide d'une étude de signe.

1. Il semble que $x \geqslant 68$.

2. L'aire du rectangle est de $2x \times x = 2x^2$; celle du triangle est de $\dfrac{56 \times x}{2} = 28x$.

Il doit donc résoudre $2x^2 + 28x - 11\,152 \geqslant 0$.

3. $(2x - 136)(x + 82) = 2x^2 + 28x + 11\,152$

Avec une étude de signe, on trouve que $x \in [68\,;+\infty[$.
La largeur du champ doit être de 68 m minimum.

TP 2. Signe d'une fonction affine

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser un algorithme pour donner le signe d'une fonction affine.

1. a) Il renvoie « f(x)=ax+b est négatif jusqu'à 3 et positif après ».

b) Il indique le signe d'une fonction affine en fonction de x.

c)

```
a=float(input("Saisir la valeur de a:"))
b=float(input("Saisir la valeur de b:"))
c=-b/a
if a>0:
    print("f(x)=ax+b est négatif jusq'à",c,"et positif après")
else:
    print("f(x)=ax+b est positif jusq'à",c,"et négatif après")
```

2. a) Il renvoie un message d'erreur.

b)

```
a=float(input("Saisir la valeur de a:"))
b=float(input("Saisir la valeur de b:"))
c=-b/a
if a>0:
    print("f(x)=ax+b est négatif jusq'à",c,"et positif après")
else:
    if a=0:
        print("f(x) est du signe de b")
    else:
        print("f(x)=ax+b est positif jusq'à",c,"et négatif après")
```

TP 3. Inéquations et calcul formel

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** S'appuyer sur un logiciel de calcul formel pour étudier le signe d'expressions.

A. 1. Voir l'ordinateur.

2. a) Non. **b)** Non.

c) Voir l'ordinateur.

d) La syntaxe doit être rigoureusement respectée : pas d'accent, tous les calculs doivent être explicités.

3. a) $x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 27x^2 + 77x + 81$

b) $4\,096x^6 + 25\,344x^5 + 66\,096x^4 + 92\,961x^3 + 74\,358x^2 + 32\,076x + 5\,832$

B. 1. a) Elle est incorrecte.

b) $(2x-1)(4x+5)$

c)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$8x^2+6x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{2}{7}$		$+\infty$
$35x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

C. 1. a) Par exemple $35x^2-3x-2=0$ et $35x^2-3x-2>0$.

b) Voir l'ordinateur.

c) On retrouve les mêmes solutions dans le tableau.

d) $x \in \left]\frac{1}{5}\,;\frac{2}{7}\right[$

2.

x	$-\infty$		$-\frac{-\sqrt{57}+5}{4}$		$-\frac{\sqrt{57}+5}{4}$		$+\infty$
$-2x^2+5x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}-2$		$\sqrt{5}-2$		1		$+\infty$
x^3+3x^2-5x+1		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

En autonomie p. 264-265

Lire et interpréter un tableau de signes

102. b **103. a** et **b** **104. b**

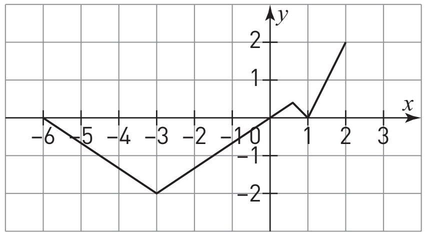
105. b **106. a** **107. b**

108.

x	-2		-1		0		$2{,}5$		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		1		2
$g(x)$	0	$+$	0	$+$	

109. Par exemple :



Étudier le signe d'un produit

110. d **111. c** **112. b**

113.

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-5x-20)(8x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

114.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

115.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$(6-9x)(2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Étudier le signe d'un quotient

116. b **117. a** **118. c**

119.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$C(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

120. a)

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$\frac{-7x+1}{x^2}$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{4x+2}{(2x+1)(-x-3)}$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	

c)

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
$\frac{1}{2-x}+\frac{1}{8+x}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Inéquation et signe

121. c

122. a

123. c

124. a

125. a) $x \in]-3\ ;\ 6[$ **b)** $x \in]-4\ ;\ 0[$

c) $x \in]-\infty\ ;\ -0{,}25[\cup [1{,}5\ ;\ +\infty[$

d) $x \in]-\infty\ ;\ 1{,}5[\cup]2\ ;\ +\infty[$

126. 1. $x \in]-3\ ;\ 3[$

2. $x \in]-\infty\ ;\ 0[\cup]0{,}5\ ;\ +\infty[$

127. 1. a)

x	-3		-2		$0{,}5$		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

b)

x	-3		$2{,}5$		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	

c)

x	-3		-2		$0{,}5$		$2{,}5$		3
$f(x)\ g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

d)

x	-3		-2		$0{,}5$		$2{,}5$		3
$\frac{f(x)}{g(x)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0

2. a) $x = -2$ ou $x = 0{,}5$ **b)** $x \in]-2\ ;\ 0{,}5[$

c) $x \in [-3\ ;\ 2{,}5]$ **d)** $x \in [-3\ ;\ -2[\cup]0{,}5\ ;\ 2{,}5[$

e) $x \in [-2\ ;\ 0{,}5] \cup]2{,}5\ ;\ 3]$ **f)** $x \in]-2\ ;\ 0{,}5[\cup]2{,}5\ ;\ 3[$

CHAPITRE 11 Proportions et évolutions en pourcentage

Manuel p. 268-285

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre se place dans la continuité du travail entamé au collège sur la proportionnalité, les évolutions en pourcentage en lien avec le coefficient multiplicateur. Il en reprend les méthodes de base via des exercices, avant d'introduire de nouveaux outils permettant la résolution de problèmes (évolutions successives, réciproques).

Proportion de proportion : cette partie engage le travail qui sera poursuivi en 1re (spécialité ou technologique) sur les arbres pondérés.

Variations relatives et absolues : la notion de variation relative permet d'étudier et de comparer des évolutions.

Évolutions successives : l'utilisation des coefficients multiplicateurs prend ici tout son intérêt ; cette étude permet d'aller à l'encontre des idées reçues, comme pour l'addition de taux d'évolution.

Évolution réciproque : on étudie une autre utilisation des coefficients multiplicateurs.

Ce chapitre prépare une grande partie des modélisations de 1re STMG mais débouche également sur de nombreuses situations modélisables par des suites géométriques en 1re spécialité.

Capacités

- ➔ **Déterminer une proportion de proportion.**
- ➔ **Déterminer une évolution en pourcentage.**
- ➔ **Déterminer un taux d'évolution après plusieurs évolutions ou un taux d'évolution réciproque.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 269

1. Calculer avec des fractions

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{1}{14}$ **c)** $\frac{3}{40}$ **d)** $\frac{75}{2}$ **e)** $\frac{4}{9}$

2. Relier effectifs et proportions

1. $100 \times 0{,}7 + 200 \times 0{,}85 = 240$ g

2. $\frac{240}{300} = 0{,}8 = 80\ \%$

3. Déterminer des proportions à partir d'effectifs

1. $\frac{12}{32} = 0{,}375$ **2.** $\frac{20}{32} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$

4. Calculer des évolutions données en pourcentage

1. $30 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 36$ euros

2. $200 \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 120$ euros

5. Déterminer des effectifs à partir de proportions

1. $1\,200 \times \frac{37}{100} = 444$ élèves

2. $444 \times \frac{2}{3} = 296$ élèves

6. Associer opérations et pourcentages

a) et **g)**

b), **d)** et **f)**

c) et **e)**

Activités p. 270-271

Activité 1. Proportion de proportion

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire le calcul de proportions d'ensembles emboîtés.

1. a) $p_1 = \frac{12}{23}$ **b)** $p_2 = 0{,}575$

c) $p_3 = 0{,}3$ **d)** $p_1 \times p_2 = p_3$

2. a) $p'_1 = \frac{2}{9}$ **b)** $p'_2 = 0{,}225$

c) $p'_3 = 0{,}05$ **d)** $p'_1 \times p'_2 = p'_3$

3. $p'' = p' \times p$

Activité 2. Variations absolue et relative

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Introduire le calcul de variations absolues ou relatives.

1. a) 8 centimes **b)** $t = \frac{8}{80} = 10\ \%$

2. On retrouve 10 %.

3. On peut avoir une variation négative, supérieure à 1 mais jamais inférieure à – 1.

Activité 3. Évolutions successives, coefficient multiplicateur global

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Déterminer un taux d'évolution global après plusieurs évolutions successives.

1. a) Il est de 5 500. **b)** Il est de 7 150.

c) Il a tort ; l'évolution est de 43 %.

2. Il aura baissé.

3. a) $c = 1{,}15$ et $c' = 1{,}4$. **b)** 1,61

c) $t = 61\ \%$

d) On multiplie les coefficients multiplicateurs associés à chaque évolution avant de calculer le taux d'évolution associé.

Activité 4. Évolutions réciproques

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Déterminer un taux d'évolution réciproque.

1. a) Il ne revient pas au niveau de départ car la hausse porte sur une quantité plus petite que celle initiale.

b) Il doit subir une hausse de 5,26 % environ.

2. a) $\frac{1}{c}$ **b)** $c_{\text{réciproque}} = \frac{1}{c}$

3. a) $c_{\text{réciproque}} = 1{,}25$ et $t_{\text{réciproque}} = 25\ \%$

b) $c_{\text{réciproque}} \approx 1{,}11\ \%$ et $t_{\text{réciproque}} \approx 11\ \%$

c) $c_{\text{réciproque}} \approx 0{,}735$ et $t_{\text{réciproque}} \approx -26{,}5\ \%$

d) $c_{\text{réciproque}} = 0{,}5$ et $t_{\text{réciproque}} = -50\ \%$

4. a) Une baisse de 20 %.

b) Une hausse de 60 %.

c) Une hausse de 100 %.

d) Une baisse de 84 %.

À vous de jouer ! p. 274-275

1. $\frac{45}{100} \times \frac{1}{3} = 0{,}15$

2. $\frac{1}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{40}$

3. 1. $c_{\text{global}} = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \times \left(1 - \frac{14}{100}\right) = 0{,}989$

et $t_{\text{global}} = 0{,}989 - 1 = -1{,}1\ \%$

2. $10 \times 0{,}989 = 9{,}89$ °C

4. $c = 0{,}77$ et $t = -23\ \%$.

Il baisse de 23 %.

5. 1. $1 - \frac{5{,}17}{100} = 0{,}9483$ **2.** $\frac{34\ 851}{0{,}9483} \approx 36\ 751$

6. 1. Par $\frac{1}{1{,}3} \approx 0{,}769$. **2.** $t \approx -23{,}1\ \%$

7. Il doit subir une baisse de 9,1 %.

Exercices d'application p. 276-277

Apprendre à apprendre

8. Les deux formules à utiliser sont $c = 1 + t$ et $t = c - 1$.

9. La deuxième hausse de 20 % porte sur un montant plus élevé que le premier, l'évolution globale sera donc supérieure à 40 %.

10. On peut déterminer une évolution en pourcentage :
– à partir des valeurs de départ et d'arrivée ;
– à partir d'un coefficient multiplicateur donné ou que l'on aura déterminé.

Questions – Flash

11. 1. Il y a $30 \times \frac{40}{100} = 12$ élèves externes.

2. Il y a $\frac{30}{\frac{10}{100}} = 300$ élèves de seconde dans le lycée.

12. 1. La proportion est de $\frac{4}{10} = 0{,}4$.

2. La proportion est de $\frac{2}{10} = 0{,}2$.

13. a) $c = 1{,}43$ **b)** $c = 0{,}8$ **c)** $c = 0{,}5$
d) $c = 1{,}3$ **e)** $c = 4$ **f)** $c = 1{,}052$
g) $c = 0{,}996$

14. a) 43 % **b)** – 4 % **c)** 3,4 %
d) 100 % **e)** – 5,7 %

15. 1. $c_{global} = 1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$ et $t_{global} = -1$ %
2. $c_{global} = 1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96$ et $t_{global} = -4$ %

16. a) $t' = 100$ % **b)** $t' = -67$ %
c) $t' = 900$ % **d)** $t' = -33$ %

Effectifs et proportion

17. $\frac{320}{500} = 0{,}64$

18. La proportion est de 0,7.

19. La proportion est de $\frac{224}{577}$, soit environ 38,82 %.

20. Elle est de 300 g.

21. Il est d'environ 709,17 milliards.

Proportion de proportion

22. $\frac{1}{2} \times \frac{20}{100} = 0{,}1$

23. $p = 0{,}28$

24. $p = 0{,}09$

Variations absolue et relative

25. $\frac{9{,}88 - 9{,}76}{9{,}76} \approx 1{,}2$ %

26. 1. La variation absolue est de 0,9 milliers.
2. $t \approx -14{,}3$ %

27. 1. a) Elle est de 1,2. **b)** $t = 10$ %.
2. $t \approx -22{,}96$ %

Coefficient multiplicateur et évolution en pourcentage

28. a) 1,3 **b)** 0,9 **c)** 1,45
d) 1,023 **e)** 0,997 **f)** 2

29. a) $c = 0{,}95$ **b)** $c = 1{,}0103$
c) $c = 4$ **d)** $c = 0{,}05$

30. a) $t = 20$ % **b)** $t = -11$ %
c) $t = 3$ % **d)** $t = 100$ %

31. a) $t = -70$ % **b)** $t = 0{,}87$ %
c) $t = 232$ % **d)** $t = -12{,}4$ %

32. 1. Elle est de 1,68 m.
2. Il pourra espérer jouer 0,4 h, c'est-à-dire 24 min.

33. 1. a) $c = 0{,}7$ **b)** Il est de 84 euros.
2. Il est de 58,8 euros.

Évolutions successives

34. 1. a) $1{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}66$
b) $0{,}66 - 1 = -0{,}34 = -34$ %
2. a) $c_{global} = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$, donc $t_{global} = -28$ %
b) $c_{global} = 1{,}15 \times 0{,}88 = 1{,}012$, donc $t_{global} = +1{,}2$ %
c) $c_{global} = 0{,}87 \times 1{,}243 = 1{,}08141$, donc $t_{global} = +8{,}141$ %
d) $c_{global} = 0{,}3 \times 3 = 0{,}9$, donc $t_{global} = -10$ %

35. a) Hausse de 6,4 %. **b)** Baisse de 80 %.
c) Hausse de 110,25 %.

36. Il a baissé de 44 %.

Évolution réciproque

37. $\frac{18}{1{,}125} = 16$

38. 1. Par 0,64. **2.** Une baisse de 36 %.

39. a) Baisse de 50 %. **b)** Hausse de 25 %.

Calculs et automatismes

40. a) $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{5}{6}$ **d)** $\frac{2}{9}$

41. a) 1,43 **b)** 0,36 **c)** 1,08 **d)** 1,04

Exercices d'entraînement p. 278-279

Proportion et effectifs

42. Il est de 253,86 euros.

43. 1. $p = 62{,}5\ \%$ **2.** Il y en a 16.
3. Le lycée compte 1 200 élèves.

44. C'est l'académie de Créteil.

Proportion de proportion

45. $p = \frac{1}{6}$

46. $p = \frac{1}{5}$

47. $p = 79{,}8\ \%$

Variations absolue et relative

48. $t \approx -23{,}3\ \%$

49. 1. Elle est de 1 554 pour le Brésil et de 4 679 pour les États-Unis.
2. Elle est d'environ 237 % pour le Brésil, et d'environ 45,5 % pour les États-Unis.
3. C'est celui du Brésil.

50. On ne paut pas affirmer que le Smic a augmenté plus vite que les prix entre 2015 et 2018.

Coefficient multiplicateur

51. 1. Elle était de 64 773 milliers.
2. Elle serait de 66 846 milliers.
3. a) $c = 1{,}0296$
b) Elle était de 60 960 milliers.

52. 1. Il renvoie 1,35.
2. Il renvoie le coefficient multiplicateur d'une évolution dont on a donné le taux en entrée.
3. On doit entrer 0,071.
4. a) Il renvoie – 0,2.
b)

```
Saisir t
Si t←1
   Afficher "Erreur"
Sinon
   c←1+t
FinSi
Afficher c
```

53.

```
Saisir c
t←c–1
Afficher t
```

54. 1. a) Il a été multiplié par 1,1.
b) Il est de 99 centimes.
c) Il a été multiplié par 0,98.
2. a) $t = 42\ \%$ **b)** $t = -10\ \%$

Évolutions successives

55. Il doit augmenter de 8,1 %.

56. À ce rythme, le chiffre d'affaire n'aura augmenté que de 8,4 %. Il doit donc remettre sa stratégie en cause.

57. a) 15 % **b)** 39,3 % **c)** 25 %

58. Il était de 51 par million d'habitants.

Évolution réciproque

59. a) – 19,35 % **b)** 7,53 %

c) – 0,85 % **d)** 81,82 %

60. Son prix est de 535 euros.

61. Il faudrait une hausse de 22,48 %.

Travailler autrement

62. L'offre la plus intéressante est la B, suivie de la A et enfin de la C.

63. 1. Les taux sont de 20 % ; 10 % ; 5,5 % et de 2,1 %.

2. Les taux réciproques respectifs sont de – 16,7 % ; – 9,09 % ; – 5,21 % ; – 2,06 %.

64. Le taux de remplissage moyen du stade dépassera 90 % au bout de 30 ans.

Exercices bilan p. 280

65. Budget

1. a) Son salaire est de 1 250 euros.

b) Elles sont de 100 euros.

2. C'est une hausse de 8 %.

3. a) Il est de 510 euros.

b) Ce sera le cas en 2028.

66. Question d'orientation

1.

	1re générale	1re techno	1re pro	Total
Garçons	6	4	2	12
Filles	14	5	1	20
Total	20	9	3	32

2. 0,625 **3.** 0,28125 **4.** 0,25

5. a) Faux. **b)** Vrai.

c) C'est vrai en proportion, faux en valeur absolue.

67. Bilan des évolutions

	Stock initial (en kg)	Stock final (en kg)	Évolution	Coeff. multiplicateur
Tomates	45,2	50,624	12 %	1,12
Oranges	80	97	21,25 %	1,2125
Citrons	20	12	– 40 %	0,6
Oignons	16	14,72	– 8 %	0,92
Carottes	143,75	115	–20 %	0,8

Cet exercice permet de de faire le bilan des différentes formules à utiliser dans le cours.

68. Culture bio

1. `=(C2–$B2)/C2`

2. C'est une hausse de 27,3 % environ.

3. $18{,}21 \times 1{,}04^9 \approx 26$ donc à ce rythme, il aura dépassé 25 %.

69. Objectif à atteindre

1. a) $t \approx -10{,}8$ %

b) Il doit baisser de 10,3 %.

2. Elle doit baisser de 7,4 %.

Exercices d'approfondissement p. 281-282

70. Fonction linéaires et évolution en pourcentage

1. a) $f(x) = 1{,}02x$

b) f est une fonction linéaire.

2. a) d_2 **b)** d_4 **c)** d_1 **d)** d_3

3. Elle va représenter une hausse si son coefficient directeur est strictement plus grand que 1, une baisse si son coefficient directeur est strictement plus petit que 1.

71. Fonction et taux d'évolution

1. $f(x) = (1 + t)x$

2. f est une fonction linéaire.

3. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4. $t = -20$ %

72. Croissance du PIB

Il doit augmenter d'au moins 0,6 %.

73. Bonnes affaires

Non, l'offre du premier revient à un prix de 1,8 euro par kilo alors que l'offre du deuxième revient à un prix de 1,82 euro par kilo.

C'est une autre manière de distinguer une baisse de 10 % et une évolution réciproque après une hausse de 10 %.

74. Inflation

1. Il s'agit d'une hausse d'environ 5,07 %.

Le coefficient multiplicateur global est égal à environ 1,0507.

2. a) $c \times c = 1{,}0507$ d'où l'équation indiquée.

b) $c = 1{,}025$ et $t = 2{,}5$ %

c) Samantha a raison.

75. Bonne résolution

1. $0{,}9^3 = 0{,}729 > 0{,}7$

2. Le coefficient multiplicateur global pour trois hausses de t % est de $(1 + t)^3$.

3. a) $X \approx 0{,}888$

b) Il faut une baisse mensuelle de 11,2 %.

76. Extinction ?

1. Elle était de 19 400 individus.

2. a) $U(2) = 18\ 818$: ce nombre représente la population de lions en 2017.

b) $U(5) = 17\ 175$

c) Ce serait le cas au bout de 10 ans.

d) $0{,}97^{20} \approx 0{,}543 > 0{,}5$ donc cette nouvelle étude est encore plus pessimiste.

3. a) U est géométrique de raison 0,97 donc $U(n) = 20\ 000 \times 0{,}97^n$.

b) Elle s'éteindrait en 2341 selon ce modèle.

Vers la 1re

77. A. 1. Il serait de 45 euros.

2. Il y aurait 19 200 entrées.

3. $45 \times 19\ 200 = 864\ 000$ €.

B. 1. `=B2*B3`

2. Il faudrait une diminution comprise entre 20 % et 30 %.

78. 1. Il y avait 120 individus.

2. $U(3)$ représente la population de tortues en 2013.

3. a) Il renvoie $n = 4$; c'est la première valeur de n telle que $U(n)$ dépasse le double de la population initiale.

b) Il faut remplacer 200 par 1 000.

4. La surface de l'île et la quantité de nourriture que l'on peut y trouver est limitée, la population de tortues ne pourra pas croître ainsi infiniment.

Travaux pratiques p. 283

TP 1. Variations absolue et relative

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Étudier l'évolution d'un prix à l'aide du tableur.

A. 1. Voir la feuille de calcul

2. Voir la feuille de calcul.

3. Voir la feuille de calcul.

4. C'est en mai 2018 que la hausse a été la plus importante (en valeur absolue comme en valeur relative). La plus forte baisse a elle eu lieu en novembre 2018.

B. 1. Il serait de 13,2 dollars.

2. C'est peu réaliste car la tendance globale est à la hausse, et que la dernière évolution était très différente de l'évolution générale.

TP 2. Algorithme d'évolution

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Utiliser un algorithme pour déterminer des taux d'évolution.

A. 1. La valeur au dénominateur doit être V_D et non V_A.

```
Vd=float(input("Va="))
Va=float(input("Vd="))
t=(Va-Vd)/Vd
print(t)
```

2. Voir les tests effectués.

3.

```
Vd=float(input("Va="))
Va=float(input("Vd="))
t=(Va-Vd)/Vd
if Vd<Va:
    print("Hausse")
else:
    print("Baisse")
print(t)
```

B. 1. Il peut servir à renvoyer un taux d'évolution après plusieurs évolutions successives.

Il faut compléter les pointillés par $t = c - 1$.

2. Il renvoie $-0{,}12$.

3. a) Il renvoie $-1{,}2$.

b)

```
t1=float(input("t1="))
t2=float(input("t2="))
if t1<-1 or t2<-1:
    print("Erreur")
else:
    c=(1+t1)*(1+t2)
    t=c-1
    print(t)
```

C.

```
a=1000
n=0
while a<2000:
    a=a*1.02
    n=n+1
print(n)
```

En autonomie p. 284-285

Déterminer des proportions

79. b, **c** et **d** **80. b** **81. b**

82. $\frac{40}{100} \times \frac{1}{2} = 0{,}2$

83. $\frac{22}{100} \times \frac{48{,}88}{100} = 0{,}107536$

84. $\frac{0{,}08}{\frac{1}{4}} = 0{,}32$

Travailler avec des évolutions en pourcentage

85. b **86. c** **87. c** **88. c**

89. a) 1,78 **b)** 0,69
c) 1,056 **d)** 0,93

90. a) + 15 % **b)** + 7 % **c)** – 30 %
d) – 10,8 % **e)** + 100 % **f)** – 98 %

91. $\frac{13-8}{8} = +62{,}5\ \%$

92. 1. $10 \times 1{,}1 = 11$ euros

2. $\frac{15{,}4}{1{,}1} = 14$ euros

Déterminer des évolutions successives

93. c **94. a** **95. b**

96. 1. $700 \times 1{,}02^2 = 728{,}28$ euros

2. $1{,}02^2 = 1{,}0404$ et $1{,}0404 - 1 = +4{,}04\ \%$

97. 1. Elle n'est pas revenue à sa valeur de départ.

2. $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$ et $0{,}99 - 1 = -1\ \%$.

98. a) $0{,}9 \times 0{,}94 = 0{,}846$ et $0{,}846 - 1 = -15{,}4\ \%$.

b) $1{,}05^3 = 1{,}157625$ et $1{,}157625 - 1 = +15{,}7625\ \%$.

99. $\frac{0{,}56}{0{,}8} = 0{,}7$ et $0{,}7 - 1 = -0{,}3 = -30\ \%$.

Déterminer des évolutions réciproques

100. c **101. c** **102. a** **103. a**

104. $\frac{1}{0{,}45} \approx 2{,}22$, donc $t \approx 122\ \%$.

105. $\frac{1}{0{,}9} \approx 1{,}111$, donc $t \approx 11{,}1\ \%$.

106. a) + 25 % **b)** – 4,12 %
c) – 75 % **d)** + 400 %

CHAPITRE 12 Statistiques descriptives

Manuel p. 286-309

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Ce chapitre reprend les notions vues au collège pour les enrichir et les compléter.

La notion de moyenne est d'abord réactivée puis enrichie de la moyenne pondérée, en lien avec des exemples pratiques (calculs simples, évolutions en pourcentage, taux de change moyen, etc.), suivie de la propriété de linéarité de la moyenne.

Le concept de dispersion d'une série statistique est ensuite introduit à travers de nouveaux indicateurs, l'écart-type puis l'écart interquartile (donc les quartiles), auxquels nous avons donné du sens (pour ce faire, la notion de médiane est réactivée) via de nombreux exercices concrets et variés.

La comparaison de séries est alors l'occasion d'utiliser de façon pertinente toutes ces notions ainsi, bien sûr, que différents types de représentations graphiques.

Les TICE ont par ailleurs une large place dans ce chapitre notamment via le tableur en activités et en TP mais également par l'utilisation de la calculatrice et de la programmation (programme calculant la moyenne et l'écart-type notamment), conformément au programme.

Capacités

→ **Comprendre et déterminer les différents indicateurs au programme.**

→ **Interpréter concrètement une situation en mobilisant des indicateurs ou des représentations graphiques pertinents.**

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 287

1. Travailler avec une série en ligne

1. • Moyenne = $\dfrac{2+7+9+11+13}{5} = 8{,}4$

• Médiane = 9 (valeur « du milieu »)

• Étendue = 13 – 2 = 11

2. • Moyenne = $\dfrac{12+1+44+35+5+18+7+102}{8} = 28$

• La série ordonnée est 1 ; 5 ; 7 ; 12 ; 18 ; 35 ; 44 ; 102.

Médiane = $\dfrac{12+18}{2} = 15$ (moyenne des valeurs « du milieu »)

• Étendue = 102 – 1 = 101

2. Travailler avec des effectifs

1. Il y a 2 week-ends durant lesquels Kirushika a pris 3 poissons.

2. Effectif de la valeur 1 : 3.

3. Il y a 8 valeurs (2 + 3 + 1 + 2) donc la fréquence de la valeur 1 est $\dfrac{3}{8} = 0{,}375$ soit 37,5 %.

4. Les valeurs sont 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3.

• Étendue = 3 – 0 = 3

• Médiane = $\dfrac{1+1}{2} = 1$

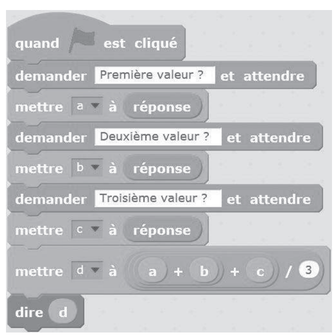
• Moyenne = $\dfrac{2\times 0+3\times 1+1\times 2+2\times 3}{8} = 1{,}375$

3. Écrire un « programme statistique »

1. Le lutin dit « 7 » ((3 + 11) / 2 = 7).

2. Le programme demande deux nombres à l'utilisateur et calcule puis affiche leur moyenne.

3. Pour trois valeurs :



4. Représenter une série statistique

1. Le graphique 1 est un diagramme en bâtons (ou barres) et le graphique 2 est un diagramme circulaire (ou camembert).

2.

Valeur	2	3	5	6	7	8	10
Effectif	7	5	5	3	4	1	6

3.

Couleur	Bleu	Rouge	Orange	Vert
Angle	85°	85°	21°	169°
Effectif	$\frac{85 \times 17}{360} \approx 4$	4	$\frac{21 \times 17}{360} \approx 1$	17–4–4–1 =8

Exemple pour le premier effectif :

360° $\rightarrow$ 17

85° $\rightarrow$?

Par produit en croix, l'effectif de « bleu » est $\frac{85 \times 17}{360} \approx 4$.

Activités p. 288-289

Activité 1. Calculer une moyenne pondérée

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Introduire la moyenne pondérée en menant par ailleurs des recherches sur les possibilités d'orientation des élèves.

Il n'y a pas de correction formelle possible puisque tout cela dépend des élèves. On note que la question **5.** est celle où apparaît la notion de moyenne pondérée.

Activité 2. Découvrir la linéarité de la moyenne

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Introduire la linéarité de la moyenne grâce au tableur.

Le concept d'adressage absolu à l'aide des $ est rappelé.

1. Voir la feuille de calcul.

2. Voir la feuille de calcul.

3. a) `=A2*H$1`

b) Voir la feuille de calcul.

4. En C2 : `=A2+H$1`

En D2 : `=A2/H$1`

En E2 : `=A2-H$1`

5. La moyenne des valeurs de la colonne A.

6. C'est la moyenne des valeurs de la colonne A (qui est en A22) multipliée par le nombre en H1 (2).

7. • La moyenne des valeurs de la colonne C est la moyenne des valeurs de la colonne A (qui est en A22) plus le nombre en H1 (2).

• La moyenne des valeurs de la colonne D est la moyenne des valeurs de la colonne A (qui est en A22) divisée par le nombre en H1 (2).

• La moyenne des valeurs de la colonne E est la moyenne des valeurs de la colonne A (qui est en A22) moins le nombre en H1 (2).

8. a) Ce doit être cohérent avec les réponses aux questions précédentes.

b) On peut conjecturer que :

– quand on ajoute (resp. soustrait) un même nombre k à toutes les valeurs d'une série, la moyenne de cette nouvelle série est égale à la moyenne de la série de départ à laquelle on ajoute (resp. soustrait) k ;

– quand on multiplie (resp. divise) par un même nombre k toutes les valeurs d'une série, la moyenne de cette nouvelle série est égale à la moyenne de la série de départ multipliée (resp. divisée) par k.

Activité 3. Découvrir et comprendre l'écart-type

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Introduire et donner du sens à la notion d'écart-type en utilisant le tableur.

Pour ne pas déstabiliser les élèves, on utilise ici la fonction ECARTYPE du tableur mais attention cependant, son résultat est l'écart-type « en $n - 1$ » $\left(\text{égal à } \sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)$. On pourra si on le souhaite demander aux élèves d'utiliser plutôt la fonction ECARTYPEP pour utiliser l'écart-type tel que défini dans le cours.

1. Voir la feuille de calcul.

2. a) Oui, les moyennes sont relativement similaires (170,8 ; 171,2 et 171,5).

b) Intuitivement, Tamminen semble la plus régulière, puis Goron et enfin Robert.

c) Voir la feuille de calcul.

d) Oui (Tamminen : 7, Goron : 17,3 et Robert : 28,4).

À adapter suivant les réponses des élèves ; s'ils n'ont pas le bon classement à la question **2. b)**, l'écart-type apparaît justement comme un indicateur objectif d'homogénéité.

3. La série des scores Nordenson semble être plus dispersée, donc avoir un plus grand écart-type, ce qui est confirmé par le tableur (32,5 contre 7,6 pour Yoshida).

Activité 4. Étudier une série avec les quartiles

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Découvrir les quartiles avec le tableur.

Le mode de calcul des quartiles par le tableur est différent de celui habituellement donné au lycée en France. Dans cette activité, nous nous sommes arrangés pour que les deux définitions coïncident.

1. Le réponses dépendent des élèves.

2. Voir la feuille de calcul.

3. La plage `B3:B219`.

4. C'est la population du pays le moins peuplé.

5. `=MAX(B3:B219)`

6. Plus petite population : Tuvalu.

Plus grande population : Chine.

7. La médiane correspond au Nicaragua (ligne 111) : il y 109 valeurs sur 217 soit environ 50 %, ce qui est normal puisque la médiane coupe une série en deux sous-séries contenant approximativement la moitié des valeurs.

8. a) Voir la feuille de calcul.

b) Le premier quartile correspond au Bhoutan (ligne 57) : il y 55 valeurs sur 217, soit environ 25,3 %.

c) Le 1er quartile d'une série est la plus petite valeur de la série supérieure ou égale à au moins un quart des valeurs.

9. `=QUARTILE(B3:B219;3)`

Le troisième quartile correspond au Cameroun (ligne 165) : il y 163 valeurs sur 217, soit environ 75,1 %.

Le 3^{e} quartile d'une série est la plus petite valeur de la série supérieure ou égale à au moins trois quarts des valeurs.

10. Entre le Bhoutan, dont la population est de 807 610 habitants, et le Cameroun, dont la population est de 24 053 727 habitants, il y a déjà quasiment un facteur 30.

En toute rigueur, il faudrait prendre le pays juste avant le Bhoutan, qui est la Guyane dont la population est de 777 859 habitants, ce qui donne quasiment un facteur 31.

À vous de jouer ! p. 294-295

1. $\dfrac{17 \times 20 + 2 \times 22 + 2 \times 24 + 5 \times 25 + 2 \times 28}{17 + 2 + 2 + 5 + 2} \approx 21{,}9$ JCP en moyenne

2. $\dfrac{5 \times 10{,}2 + 4 \times 10{,}4 + 4 \times 9}{5 + 4 + 4} \approx 9{,}9$ GHz

3. La calculatrice donne environ 2,62.

4. 1. $m = 3{,}75$ et $s \approx 2{,}7$.

2. Pour Jonas, l'écart-type est $0{,}5 < 2{,}7$ donc il a couru plus régulièrement que Jody.

5.

d'enfants	0	1	2	3	4
Effectif	16	26	31	2	25
ECC	16	42	73	75	100

1. On a :

- $\dfrac{100}{2} = 50$, donc médiane $= \dfrac{2+2}{2} = 2$ (moyenne des 50^{e} et 51^{e} valeurs) ;
- $\dfrac{100}{4} = 25$, donc $Q_1 = 1$ (25^{e} valeur) ;
- $\dfrac{3 \times 100}{4} = 75$, donc $Q_3 = 3$ (75^{e} valeur).

2. Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$.

3. Les indicateurs (médiane et quartiles) sont identiques, donc on peut penser que les groupes sont relativement similaires sur ce critère.

6. 1.

Nombre de trajets	0	1	2	3	4	5
ECC	51	56	92	93	105	107

- $\frac{107}{2} + 0{,}5 = 54$, donc médiane = 1 (54^e^ valeur)
- $\frac{107}{4} = 26{,}75$, donc $Q_1 = 0$ (27^e^ valeur)
- $\frac{3 \times 107}{4} = 80{,}25$, donc $Q_3 = 2$ (81^e^ valeur)

2. L'écart interquartile est 2 – 0 = 2.

3. $\frac{92}{107} \approx 0{,}86$, donc il y a environ 86 % des valeurs entre Q_1 et Q_3.

Exercices d'application p. 296-297

Apprendre à apprendre

7. On multiplie les valeurs par leurs coefficients associés, puis on divise par la somme des coefficients.

8. 1. Non, il n'est pas correct.

2. Voir le cours p. 293 pour la définition. Si l'on considère la 10^e^ valeur, il n'y a pas « au moins 25 % des valeurs qui lui sont inférieures ou égales » car $\frac{10}{41} \approx 0{,}244$, soit environ 24,4 %.

9. 1. Voir la définition.

2. L'écart interquartile et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion. Ils permettent de dire dans quelle mesure les valeurs de la série sont dispersées (éloignées), respectivement autour de la médiane et de la moyenne.

Questions - Flash

10. a) $\frac{5+7+8+14+14+17+36}{7} \approx 14{,}4$

b) $\frac{5 \times 2 + 15 \times 5 + 22 \times 6 + 14 \times 12 + 4 \times 14}{5 + 15 + 22 + 14 + 4} = 7{,}35$

11. $\frac{3 \times 4 + 5 \times 7 + 1 \times 12}{3+5+1} \approx 6{,}56$

12. 1. 13,8 (linéarité de la moyenne : on ajoute 3)

2. 21,6 (linéarité de la moyenne : on multiplie par 2)

13. 1. Environ 9,7. **2.** Environ 3,5.

14. Le niveau est le plus homogène dans la classe où l'écart-type est le plus petit.

15. 1. Série de la question **a)** :
médiane = 14 (4^e^ valeur), $Q_1 = 7$ (2^e^ valeur) et $Q_3 = 17$ (6^e^ valeur).
Donc l'écart interquartile est 17 – 7 = 10.

2. Série de la question **b)** :
médiane = 6 (moyenne des 30^e^ valeur et 31^e^ valeur), $Q_1 = 5$ (15^e^ valeur) et $Q_3 = 12$ (45^e^ valeur).
Donc l'écart interquartile est 12 – 5 = 7.

16. On peut penser que dans la ville 1 les habitants ont des revenus plus homogènes que dans la ville 2.

Calculer une moyenne

17. $\frac{452 + 454 + \ldots + 494}{10} = 465{,}4$ minutes

18. $\frac{15 \times 125 + 12 \times 126 + \ldots + 9 \times 131}{15 + 12 + \ldots + 9} \approx 127$ camions

19. $\frac{41 \times 0 + 823 \times 1 + \ldots + 99 \times 5}{41 + 823 + \ldots + 99} \approx 2{,}1$ habitants par logement

20. $\frac{2 \times 5 + 4{,}5 \times 10 + 3 \times 21 + 1 \times 36}{2 + 4{,}5 + 3 + 1} \approx 14{,}7$

21. $\frac{2 \times 14{,}5 + 1 \times 17 + 0{,}5 \times 12}{2 + 1 + 0{,}5} \approx 14{,}9$

22. $\frac{180 \times 7{,}8543 + 220 \times 7{,}8464 + 125 \times 7{,}788}{180 + 220 + 125} \approx$ 7,8352 ¥ par € environ

Linéarité de la moyenne

23. 1. 6

2. a) $1\,000 \times 6 = 6\,000$ **b)** $50 + 6 = 56$

24. 2 148 + 4 = 2 152 livres

25. 1 671 × 1,01 = 1 687,71 €

26. a) 35,40 × 0,5 = 17,7 €

b) 35,40 × 0,7 = 24,78 €

Utiliser l'écart-type

27. On peut éliminer l'année 2018 car il y a nettement moins de ventes.

Entre 2016 et 2017, on privilégie 2016 car, à ventes mensuelles assez similaires en moyenne entre 2016 et 2017, elles sont nettement plus stables en 2016, l'écart-type étant beaucoup plus petit (497 contre 811).

28. Grenoble (les températures y sont moins homogènes).

29. a) $s \approx 40{,}5$ **b)** $s \approx 4{,}2$

30. La moyenne est environ 3,4 et l'écart-type 1,8.

31. 1. La moyenne est environ 4,3 et l'écart-type 1,6.

2. Non, car l'écart-type n'a pas baissé (il a même augmenté).

32. 1. $m \approx 4{,}28$ et $s \approx 1{,}05$.

2. L'intervalle est (approximativement) [2,18 ; 6,38], donc $\dfrac{5+22+36}{1+2+1+5+22+36} \approx 0{,}94$, soit environ 94 % des valeurs sont dans l'intervalle.

Calculer des quartiles

33. L'effectif total est 3 + 4 + 15 + 1 + 9 = 32.

Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

Valeurs	−5	−2	1	6	8
ECC	3	7	22	23	32

• $\dfrac{32}{2} = 16$, donc médiane $= \dfrac{1+1}{2} = 1$ (moyenne des 16^{e} et 17^{e} valeurs).

• $\dfrac{32}{4} = 8$, donc $Q_1 = 1$ (8^{e} valeur).

• $\dfrac{3 \times 32}{4} = 24$, donc $Q_3 = 8$ (24^{e} valeur).

• Écart interquartile : 8 − 1 = 7.

34. Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

Nbre de fruits et légumes	0	1	2	3	4	5	6	7
ECC	54	178	275	384	627	805	856	891

• $\dfrac{891}{2} + 0{,}5 = 446$, donc médiane = 4 (446^{e} valeur).

• $\dfrac{891}{4} = 222{,}75$, donc $Q_1 = 2$ (223^{e} valeur).

• $\dfrac{3 \times 891}{4} = 668{,}25$, donc $Q_3 = 5$ (669^{e} valeur).

• Écart interquartile : 5 − 2 = 3.

35. 1. Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

Nombre de buts	2	3	4	5	6	9
ECC	4	10	16	23	29	30

• $\dfrac{30}{2} = 15$, donc médiane = 4 (moyenne des 15^{e} et 16^{e} valeurs).

• $\dfrac{30}{4} = 7{,}5$, donc $Q_1 = 3$ (8^{e} valeur).

• $\dfrac{3 \times 30}{4} = 22{,}5$, donc $Q_3 = 5$ (23^{e} valeur).

• Écart interquartile : 5 − 3 = 2.

2. On peut penser que c'est Siraba car l'écart interquartile lui correspondant est plus petit.

36. 1. Le tableau des effectifs cumulés croissants est :

Nombre d'étoiles	0	1	2	3	4	5
ECC	1	3	4	9	31	67

• $\dfrac{67}{2} + 0{,}5 = 34$, donc médiane = 5 (34^{e} valeur).

• $\dfrac{67}{4} = 16{,}75$, donc $Q_1 = 4$ (17^{e} valeur).

- $\frac{3 \times 67}{4} = 50{,}25$, donc $Q_3 = 5$ (51[e] valeur).
- Écart interquartile : 5 – 4 = 1.

2. Il y a 67 – (1 + 2 + 1 + 5) = 58 avis dans l'intervalle et $\frac{58}{67} \approx 0{,}87$, donc environ 87 % des avis.

37. Par exemple : 1 ; 13 ; 14 ; 16 ; 17 ; 36.

Calculs et automatismes

38. $16x^2 + 24x - 3$

39. 3^{19}

40. $3\sqrt{7}$

41. 8

Exercices d'entraînement p. 298-301

Autour de la moyenne

42. 1. Par linéarité de la moyenne :
$1\,437 \times 3 = 4\,311$ euros.

2. Cela coûte $10 \times 4\,311 - 10 \times 1\,437 = 28\,740$ euros.

L'énoncé laisse à penser que la radio « complète » le salaire mais on ne saurait considérer comme faux une compréhension différente de l'énoncé où l'on considérerait que la radio donne le triple de son salaire à chaque vainqueur.

43. 1. On résout $\frac{1{,}5 \times 5 + 4 \times 12 + 2 \times 15 + 5 \times x}{1{,}5 + 4 + 2 + 5} = 22.$

On trouve $x = 37{,}9$.

2. On résout $\frac{1{,}5 \times 5 + 4 \times 12 + 2 \times 15 + c \times 36}{1{,}5 + 4 + 2 + c} = 20{,}625.$

On trouve $c = 4{,}5$.

44. 1. $\frac{6 \times 74 + 92 \times 6 + \ldots + 3 \times 79}{6 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3} = 75{,}6.$

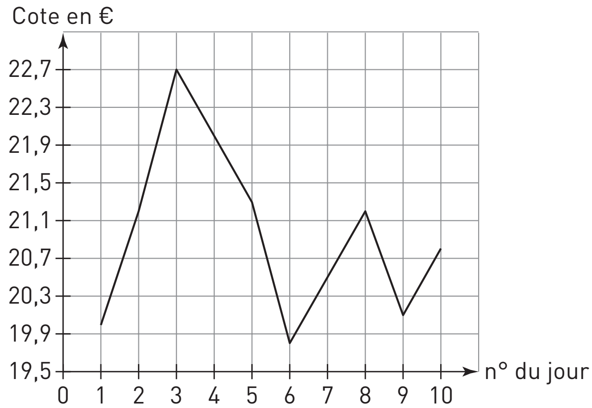
2. On résout $\frac{6 \times x + 6 \times 92 + \ldots + 3 \times 79}{6 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3} = 80$ et on trouve qu'il aurait dû avoir 96/100 pour avoir mention très bien.

45. 1. On calcule les tarifs pondérés par la consommation $\frac{0{,}3 \times 0{,}123 + 0{,}7 \times 0{,}156}{1} = 0{,}1461$ € par kWh.

2. On résout $130 + 0{,}147x > 150 + 0{,}1461x$. On trouve $x > \frac{200\,000}{9}$ donc la famille est gagnante à partir d'environ 22 223 kWh par an (si on veut un résultat à l'unité).

46. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n valeurs de la série.
On a alors :
$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ donc $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m \times n$.

47. 1. *Le graphique n'est pas à l'échelle 1.*



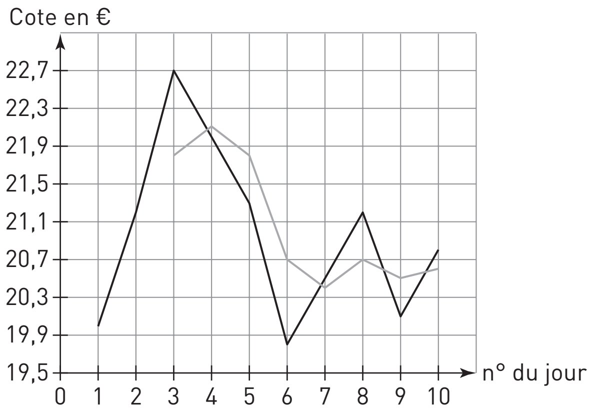
2. a) Parce qu'il n'y a pas de veille ou d'avant-veille.

b) $\frac{3 \times 22{,}7 + 2 \times 21{,}1 + 1 \times 20}{1 + 2 + 3} = 21{,}75$ euros

c) En arrondissant au dixième si nécessaire :

Jour n°	3	4	5	6
Moyenne mobile	21,8	22,1	21,8	20,7
Jour n°	7	8	9	10
Moyenne mobile	20,4	20,7	20,5	20,6

d) C'est la courbe grise sur le graphique ci-dessous.



3. Sur la 2e courbe (en gris), les variations sont moins marquées ce qui permet de mieux observer la tendance générale.

48. A.

Nbre de SMS	12,5	37,5	62,5	87,5
Effectif	21	12	42	25

$$\frac{21\times 12{,}5+12\times 37{,}5+42\times 62{,}5+25\times 87{,}5}{100}=55{,}25$$

SMS en moyenne

B.

Temps d'accès	1,5	10	24	90,5
Fréquence	0,5	0,25	0,2	0,05

$0{,}5\times 1{,}5+0{,}25\times 10+0{,}2\times 24+0{,}05\times 90{,}5=$ 12,575 minutes

49. Par linéarité de la moyenne,

$11{,}2\times\left(1+\dfrac{t}{100}\right)=12{,}768$ ce qui donne $t=14$.

Autour de l'écart-type

50. Non, il suffit de trouver un contre-exemple (une série de deux valeurs et $a=1$ par exemple) pour constater que ce n'est pas le cas.

On peut prolonger l'exercice en faisant conjecturer que l'écart-type n'est pas modifié et le faire démontrer à l'aide de la propriété de linéarité de la moyenne et de la formule de l'écart-type (exercice de niveau approfondissement).

51. On reprend le tableau du corrigé et la calculatrice donne $s\approx 26{,}5$.

52. Plus les valeurs sont globalement proches de la moyenne, plus l'écart-type est petit. Ici, $s_1 < s_3 < s_2$.

53. Même raisonnement que pour l'exercice précédent. Ici, $s_1 < s_3 < s_2$.

54. 1. a) $m\approx 17{,}3°$ et $s\approx 19{,}7°$.

b) Non, elle semble trop grande à cause d'une valeur aberrante (voir la question **2.**). On note en particulier un écart-type particulièrement grand.

2. 91° semble relever d'une erreur de mesure.

3. $m\approx 12{,}1°$ et $s\approx 0{,}8°$.

4. Oui : on constate que la suppression d'une valeur extrême de la série (son maximum, 91) a significativement fait baisser sa moyenne et énormément réduit l'écart-type.

Représentations graphiques et comparaison de séries

55. Le type de graphique n'est pas particulièrement adapté (des points seuls l'auraient plus été) mais il provient d'une étude d'un institut d'études (https://aldus2006.typepad.fr/files/gfk-rentree-litteraire-2017.pdf) et nous avons souhaité le conserver sous cette forme dans une optique de formation des élèves à l'appropriation de données dans la « vie réelle ».

1. *Chanson douce* : 5 500 exemplaires

Petit Pays : 12 000 exemplaires

2. Environ 1 000 + 5 000 + 8 000 + 7 000 = 21 000 exemplaires sur ces 4 semaines

3. *Petit Pays* s'est mieux vendu au départ. Au final, *Chanson douce* semble s'être mieux vendu.

4. Lors de la 44e semaine pour *Chanson douce* et de la 46e semaine pour *Petit Pays*.

5. Goncourt : *Chanson douce* ; Goncourt des lycéens : *Petit Pays* (voir la question **4.**).

6. Le Goncourt (augmentation de près de 20 000 ventes entre les semaines 43 et 44 contre une augmentation de près de 10 000 ventes entre les semaines 45 et 46 pour le Goncourt des lycéens par exemple).

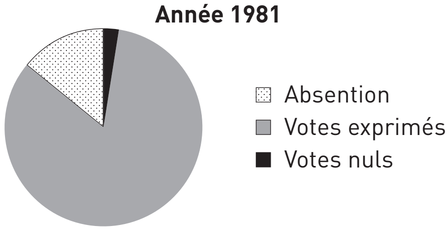
7. On constate une très nette augmentation durant la période des fêtes de fin d'année, propice à l'achat de cadeaux, puis une grosse chute après celle-ci.

56. 1. Le tableau donnant les mesures des angles des secteurs (arrondies au degré) est :

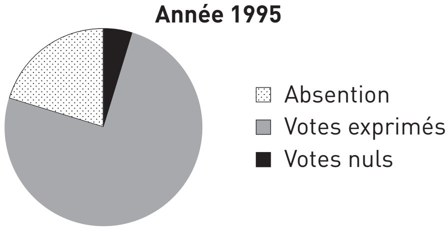
Année	1981	1995	2017
Absention	51°	73°	92°
Votes exprimés	300°	270°	237°
Votes nuls	9°	17°	31°

On obtient :

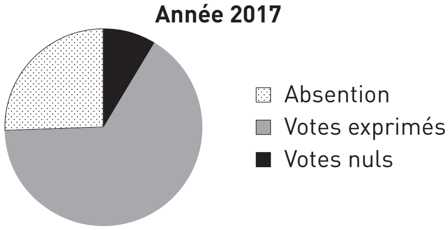
Année 1981



Année 1995



Année 2017



2. On observe très clairement une augmentation de l'abstention et du vote nul.

Choisir un bon indicateur

57. 1. Les indicateurs sont relativement similaires avec le meilleur salaire médian dans l'entreprise 1 où l'écart interquartile est un peu plus élevé (donc on peut penser que les écarts de salaires y sont un petit peu plus importants).

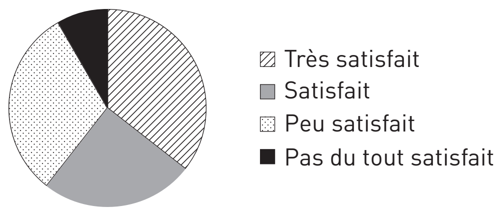
2. a) On peut penser que quelques gros salaires (nettement plus élevés que les autres) tirent la moyenne vers le haut et induisent un écart-type plus élevé.

b) Plutôt l'entreprise 2, puisque la comparaison des écart-types montre clairement que les salaires y sont plus homogènes.

C'est encore une fois l'occasion de constater que l'écart interquartile n'est pas sensible aux valeurs extrêmes, contrairement à l'écart-type et que, suivant la situation, il faut choisir de manière pertinente l'indicateur de dispersion à utiliser (ici, le but de la comparaison entre les deux entreprises est justement de savoir si des salaires sont très élevés ou très bas par rapport aux autres, il faut donc un indicateur de dispersion qui tienne compte des valeurs extrêmes : l'écart-type).

58. A. 1. Les « valeurs » de la série ne sont pas des nombres.

2. On peut utiliser un diagramme circulaire par exemple :



construit avec le tableau suivant.

Avis	Pas du tout satisfait	Peu satisfait	Satisfait	Très satisfait
Angle	30°	112,5°	90°	127,5°

3. a) On obtient :

Note	0	1	2	3
Effectif	12	45	36	51

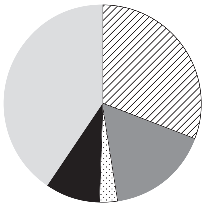
$m = 1{,}875$ et $s \approx 0{,}992$.

b) Oui, ils paraissent assez pertinents (même si le graphique précédent est également très lisible).

B. 1. $m \approx 55$ et $s \approx 28$.

Ces indicateurs n'ont absolument aucun sens ! Comme c'est expliqué à la question suivante, il faut considérer les « valeurs » comme des symboles et non des nombres : on aurait tout aussi bien pu écrire Doubs, Jura, Haut-Rhin, Haute-Saône et Territoire de Belfort !

2. Avec un diagramme circulaire par exemple (c'est généralement un bon choix pour les séries qualitatives) :



construit avec le tableau suivant.

Département	25	39	68	70	90
Angle	146°	32°	11°	60°	111°

59. 1. La médiane par exemple.

2. Le salaire médian est 1 797 €.

3. Entre 60 % et 70 % d'après le tableau.

4. $\frac{1\,797}{2\,250} \approx 0{,}8$, soit environ 80 %.

60. 1.

Il y a évidemment de nombreuses réponses possibles. Le but de l'exercice est de susciter la discussion sur la pertinence des différents indicateurs.

• Pour le sexe, il y a unanimité, donc pas d'ambiguïté.

• Pour la taille, on a des valeurs numériques, on peut donc choisir la moyenne ou la médiane pour « les résumer ». Comme la valeur 2,10 semble aberrante, on peut la retirer dans le calcul de la moyenne : c'est une moyenne élaguée (la médiane, elle, ne tient pas compte de cette valeur maximale).

On peut s'interroger sur l'écart entre les valeurs et la moyenne ou la médiane : on peut discuter de l'opportunité de donner une « fourchette » pour donner l'idée de dispersion : on peut utiliser les quartiles, l'écart-type ou, comme il y a peu de valeurs, des valeurs obtenues « visuellement » (on peut également arrondir à 5 cm près dans ce contexte concret).

• Pour l'âge, on pourrait calculer la moyenne ou la médiane. On voit que les valeurs extrêmes sont assez éloignées mais pas isolées : il y a 22-22-23 et 33-34, il paraît donc impossible de les écarter. On pourra, *a priori* de manière plus pertinente, donner une fourchette du minimum au maximum, les valeurs semblant assez réparties et dispersées de part et d'autre des moyenne et médiane (on peut également arrondir à 5 ans près dans ce contexte concret).

• Pour la couleur, on ne peut pas faire de calcul, donc il faut trouver un autre critère : le mode (« valeur » apparaissant le plus souvent) paraît intéressant car le rouge se détache clairement (possibilité de nuancer avec rouge-orange !).

En résumé, un texte possible est :

Après auditions de 10 témoins ayant assisté à ce vol, il apparaît que nous recherchons une personne de sexe féminin, mesurant approximativement entre 1,45 m et 1,60 m, âgée d'entre 20 et 35 ans et conduisant une voiture rouge.

2. Voir la réponse à la question précédente.

Études de séries statistiques

61. 1. a) Me = 2 460 (moyenne des 6e et 7e valeurs), Q_1 = 1 870 (3e valeur) et Q_3 = 2 690 (9e valeur) donc EQ = 2 690 − 1 870 = 820.

b) $[Q_1 - 1{,}5EQ\ ;\ Q_3 + 1{,}5EQ]$ est [640 ; 3 920] donc aucune valeur n'est aberrante (0 %).

2. a) m = 2 452,5 et $s \approx 592{,}6$.

b) $[m - 2s\ ;\ m + 2s]$ est approximativement [1 267,3 ; 3 637,7].

$\frac{11}{12} \approx 0{,}92$, donc environ 92 % des valeurs sont dans cet intervalle.

3. • Me = 2 580 (7e valeur) ; • Q_1 = 2 050 (4e valeur) ;
• Q_3 = 2 970 (10e valeur) ; • EQ = 2 970 − 2 050 = 920 ;
• $[Q_1 - 1{,}5EQ\ ;\ Q_3 + 1{,}5EQ]$ est [670 ; 4 350].

$\frac{1}{13} \approx 0{,}08$, donc environ 8 % des valeurs sont aberrantes ;

• $m \approx 2\,611{,}5$ et $s \approx 792{,}3$;

• $[m - 2s\ ;\ m + 2s]$ est approximativement [1 026,9 ; 4 196,1], donc environ 92 % des valeurs sont dans l'intervalle.

62. 1. a)

FC	71	72	73	74	75	76	77
ECC	5	9	17	24	34	43	55
FC	78	79	80	81	82	83	90
ECC	68	73	83	96	108	126	135

• $\frac{135}{2} = 67{,}5$, donc médiane = 78 (68e valeur) ;

• $\frac{135}{4} = 33{,}75$, donc $Q_1 = 75$ (34e valeur) ;

• $\frac{3 \times 135}{4} = 101{,}25$, donc $Q_3 = 82$ (102e valeur) ;

• écart interquartile : 82 – 75 = 7.

b) $\frac{10+13+12+18+9}{135} \approx 0{,}46$, soit environ 46 %.

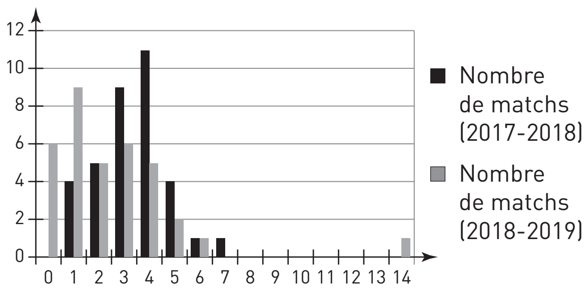
2. $m \approx 78{,}9$ et $s \approx 4{,}6$.

3. a) Le 3e quartile (102e valeur) est 79, donc il y a au plus 135 – 102 = 33 patients dont la fréquence cardiaque est supérieure ou égale à 80, soit moins de 25 %.

b) 25 % < 46 %, donc on peut penser que la présence du médecin contribue à l'augmentation de la fréquence cardiaque.

c) Oui, la médiane, la moyenne et le 3e quartile sont tous plus grand (et égal pour le 1er quartile) chez le médecin qu'au domicile des patients. L'écart-type est lui aussi plus grand chez le médecin : cela montre une plus grande homogénéité des valeurs autour de la moyenne au domicile.

63. 1. a)



b) • Durant la saison 2017-2018, les effectifs sont plus élevés (ou égaux) pour les plus grands nombres de paniers à trois points par match (2, 3, 4, 5, 6, 7), sauf 14, durant l'année 2018-2019. On constate également que les petits nombres de panier à trois points par match (0 et 1) sont plus fréquents en 2018-2019. On peut donc penser qu'il a été plus performant en 2017-2018 malgré une très belle performance en 2018-2019 (14 paniers à trois points durant un match).

• Les valeurs de 2017-2018 semblent plus homogènes, essentiellement entre 2 et 5 paniers à trois points par match ce qui indique une plus grande régularité.

2. a) • Pour 2017-2018, $m_1 \approx 3{,}4$ et $s_1 \approx 1{,}4$.

• Pour 2018-2019, $m_2 \approx 2{,}5$ et $s_2 \approx 2{,}6$.

b) Oui, car la moyenne est plus élevée en 2017-2018, ce qui indique une meilleure performance « globale » et l'écart-type est plus petit en 2017-2018, ce qui indique une plus grande régularité.

c) $[m_2 - 2s_2 ; m_2 + 2s_2]$ est approximativement $[-2{,}7 ; 7{,}7]$.

$\frac{34}{35} \approx 0{,}97$, donc environ 97 % des valeurs de la série 2018-2019 sont dans l'intervalle.

d) Certes, Thompson a réalisé un match fabuleux mais ce début de saison 2018-2019 est globalement bien plus décevant que celui de l'année précédente, notamment en termes de régularité.

3. a)

Nb 3 pts	0	1	2	3	4	5	6	7	14
ECC 2017-2018	0	4	9	18	29	33	34	35	35
ECC 2018-2019	6	15	20	26	31	33	34	34	35

En 2017-2018 :

• $Q_1 = 2$ (9e valeur) ;

• la médiane est 3 (18e valeur) ;

• $Q_3 = 4$ (27e valeur) ;

• écart interquartile = 2.

En 2018-2019 :

• $Q_1 = 1$ (9e valeur) ;

• la médiane est 2 (18e valeur) ;

• $Q_3 = 4$ (27e valeur) ;

• écart interquartile = 3.

b) Pour tous ces indicateurs, ceux de la saison 2018-2019 sont inférieurs ou égaux à ceux de la saison 2017-2018, ce qui confirme une performance globale moins bonne en 2018-2019.

De même, l'écart interquartile de 2018-2019 est plus grand que celui de 2017-2018 (3 contre 2) ce qui indique moins de régularité (il ne tient pourtant pas compte de la valeur « la plus irrégulière » de 2018-2019 !).

Travailler autrement

64. Bill Gates dispose d'une fortune de 90 milliards de dollars. Dans un (très grand) bar contenant 1 000 personnes n'ayant aucune fortune, en moyenne tout le monde « disposerait » de près de 90 000 000 de dollars…

Cette citation provient d'un article du prix Nobel d'économie Paul Krugman visant à illustrer en quoi l'augmentation des revenus des personnes les plus riches impacte certes sur le revenu moyen affiché mais ne change pas celui des personnes de la classe moyenne.

https://www.nytimes.com/2006/03/24/opinion/letter-to-the-secretary.html

65. Voir les différentes réponses des élèves.

Exercices bilan p. 302

66. Augmentation de salaire

A. 1. Par linéarité de la moyenne :

$2\,339{,}5 \times 1{,}1 = 2\,573{,}45$ €

2. Par linéarité de la moyenne :

$2\,339{,}5 + 200 = 2\,539{,}5$ €

3. La modalité 1 (salaire moyen plus élevé).

B. 1. L'écart-type est environ 1 406,5 €.

2.

Salaire	1 450	1 510	1 925	5 125
ECC	15	25	40	50

- La médiane est 1 717,5 (moyenne des 25e et 26e valeurs) ;
- $Q_1 = 1\,450$ (13e valeur) ;
- $Q_3 = 1\,925$ (38e valeur) ;
- l'écart interquartile est 1 925 – 1 450 = 475.

3. Dressons le tableau avec les nouveaux salaires selon les deux modalités.

Salaire modalité 1	1 595	1 661	2 117,5	5 637,5
Salaire modalité 2	1 650	1 710	2 125	5 325
Effectif	15	10	15	10

Seulement 10 des 50 employés sont gagnants dans le cas d'une augmentation de 10 %, ce qui explique le résultat du vote.

67. Univers virtuel

1.

Gain alg.	–1	0	1	3
Nbre coffres verts	2 244 973	323 000	295 000	60 000
Gain alg.	9	99	399	3 999
Nbre coffres verts	77 000	20	5	2

Gain alg.	–2	1	3
Nbre coffres bleus	1 089 647	191 308	191 308
Gain alg.	13	148	14 998
Nbre coffres bleus	27 709	26	2

2. Pour les coffres verts : $m_v = -0{,}355$; $s_v \approx 3{,}738$.

Pour les coffres bleus : $m_b \approx -0{,}68$; $s_b \approx 17{,}525$.

3. a) On peut penser que l'écart-type est aussi élevé car il est tiré par la valeur 14 998 qui est très éloignée de la moyenne (si on ramène les effectifs des deux lots à 3 000 000, il y en aurait d'ailleurs 4).

b)

Gain alg.	–2	1	3
Nbre coffres bleus	1 089 647	191 308	191 308
Gain alg.	13	148	3 998
Nbre coffres bleus	27 709	26	2

$m_b \approx -0{,}695$; $s_b \approx 5{,}34$; ce qui fait grandement diminuer l'écart-type (et le ramène à une valeur proche de celui obtenu pour les coffres verts) et confirme la réponse précédente.

c) Non, ils ne sont pas modifiés (dans les deux cas : Q_1 = médiane = –2 et Q_3 = 1).

d) Un changement des valeurs extrêmes peut contribuer à modifier grandement l'écart-type mais n'a pas d'influence sur l'écart interquartile.

68. Une question de débit

1. a) En regardant les courbes, le débit est plus élevé à Vernon (la courbe lui correspondant est toujours au-dessus) et plus homogène à Alfortville (les écarts entre valeurs sont moins élevés).

b) L'histogramme correspondant à Vernon est en bleu. Comme le débit y est plus élevé, son histogramme est celui qui est le plus décalé à droite (on constate que les valeurs sont également plus dispersées car l'histogramme est plus étalé).

2. a)

Débit à A.	[50 ; 75[	[75 ; 100[	[100 ; 225[
ECC	43	72	91

Le 3e quartile est la 69e valeur : il est compris entre 75 et 100 m³/s.

b) Le débit à Vernon est toujours supérieur ou égal à 150 m³/s et le 3e quartile des débits à Alfortville est inférieur à 100 m³/s donc le débit à Vernon est supérieur à celui d'Alfortville au moins 75 % du temps.

La ville de Vernon est située plus loin sur le cours de la Seine qui est donc rejointe par plusieurs affluents entre ces deux villes : cela augmente son débit.

Exercices d'approfondissement p. 303

69. Moyenne des sous-groupes

1. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \times \overline{x}$ et $y_1 + y_2 + \ldots + y_p = p \times \overline{y}$

Ainsi la moyenne de la série de toutes les valeurs est $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_1 + y_2 + \ldots + y_p}{n+p} = \dfrac{n \times \overline{x} + p \times \overline{y}}{n+p}$.

2. $\dfrac{51 \times 21 + 1\,026 \times 52}{51 + 1\,026} \approx 50{,}53$ minutes, c'est-à-dire 50 minutes et 32 secondes.

70 . Notation de la somme

1. $\sum_{i=5}^{10} x_i$

2. $x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11} + x_{13} + x_{15} + x_{17}$

3. $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

71. Formule de l'écart-type

D'après le cours :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2mx_i + m^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} -2mx_i + \sum_{i=1}^{n} m^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2m\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{nm^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2m \times m + m^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

72. Moyenne pondérée et effectifs

Cette moyenne pondérée est :

$$\frac{\overbrace{c_1 \times x_1 + \ldots + c_1 \times x_1}^{n_1 \text{ fois}} + \ldots + \overbrace{c_p \times x_p + \ldots + c_p \times x_p}^{n_p \text{ fois}}}{\underbrace{c_1 + \ldots + c_1}_{n_1 \text{ fois}} + \ldots + \underbrace{c_p + \ldots + c_p}_{n_p \text{ fois}}} = \frac{n_1 \times c_1 \times x_1 + \ldots + n_p \times c_p \times x_p}{n_1 \times c_1 + \ldots + n_p \times c_p}$$

73. Quel quartile ?

1. Il affiche le 1er quartile d'une série de valeurs (rentrées dans l'ordre croissant avec l'effectif total spécifié au départ).

2. Il suffit de changer la condition en `while i<3*n/4`.

3 .
```
n = input("Saisir effectif : ")
n=int(n)
print("Votre série doit être triée !")
x = input("Saisir 1re valeur : ")
x=float(x)
i=1
if n%2==1:
    while i!=(n+1)/2:
        x = input("Saisir valeur : ")
        x=float(x)
        i=i+1
    print(x)
else :
    while i!=n/2:
        x = input("Saisir valeur : ")
        x=float(x)
        i=i+1
    y = input("Saisir valeur : ")
    y=float(y)
    print((x+y)/2)
```

Vers la 1re

74. a)

Issue	10	– 2
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

L'espérance associée est $\frac{1}{6} \times 10 + \frac{5}{6} \times (-2) = 0$.

La somme des probabiltés étant 1, il est inutile de diviser par cette somme.

b)

Issue	– 10	10
Probabilité	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

L'espérance associée est $\frac{19}{37} \times (-10) + \frac{18}{37} \times 10 = -\frac{10}{37}$.

c)

Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,2	0,35	0,15	0,3

L'espérance associée est :
$0{,}2 \times 1 + 0{,}35 \times 2 + 0{,}15 \times 3 + 0{,}3 \times 4 = 2{,}55$.

75. On a $n = 20$, $m = 2{,}984$ et $s \approx 0{,}101$.

$\left[m - 2\frac{s}{\sqrt{n-1}} \,;\, m + 2\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$ est donc approximativement [2,937 ; 3,031] (borne inférieure arrondie par défaut et borne supérieure par excès).

Travaux pratiques p. 304-307

TP 1. Calculatrice, moyenne et écart-type

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique à l'aide de la calculatrice.

TP 2. « Forme d'une série »

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Observer graphiquement dans quelles conditions on peut s'attendre à ce qu'environ 95 % des valeurs d'une série soient dans l'intervalle [m – 2s ; m + 2s].

1. a) On peut penser que la moyenne est proche de 16 car tous les diagrammes sont approximativement centrés sur cette valeur.

b) $s_1 < s_3 < s_2$

2. Voir la feuille de calcul.

3. Voir la feuille de calcul.

4. Le diagramme en bâtons de la série 1 est en forme de cloche, celui de la série 2 en forme de creux et celui de la série 3 uniformément réparti.

5. a) Voir la feuille de calcul.

b) Non. Pour la série 1, le pourcentage est proche de 95 % ; pour les deux autres séries, il est proche de 100 %.

c) Voir la feuille de calcul.

d) Oui.

e) Quand la série est en forme de cloche, on peut s'attendre à avoir environ 95 % des valeurs dans l'intervalle [m – 2s ; m + 2s]. Dans les deux autres cas, c'est environ 100 %.

TP 3. Calcul de la moyenne et de l'écart-type

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Écrire un programme permettant de calculer la moyenne m et l'écart-type s d'une série

puis de déterminer la proportion des valeurs dans l'intervalle $[m - 2s \,;\, m + 2s]$.

Nous nous sommes astreints à ne pas utiliser les listes en seconde, le programme nécessite donc la saisie des valeurs à deux reprises ainsi que d'utiliser une formule « moins naturelle » de l'écart-type admise en début de TP.

A. $\sqrt{\dfrac{2^2+12^2+15^2}{3}-\left(\dfrac{2+12+15}{3}\right)^2} \approx 5{,}558.$

B. 1 . Voir le programme en pied de page.

2. a) La moyenne est $\dfrac{\text{somme1}}{n}$.

b) L'écart-type est $\sqrt{\dfrac{\text{somme2}}{n}-\left(\dfrac{\text{somme1}}{n}\right)^2}$.

3. à **6.** Voir le programme.

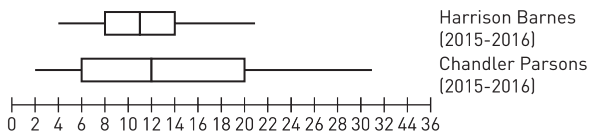
TP 4. Le bon contrat ?

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Comprendre et construire des diagrammes en boîtes et les utiliser pour comparer des séries.

Ce type de graphique n'est pas au programme de seconde mais il apparaît naturellement lorsque l'on veut comparer des séries statistiques.

A. 1. Le minimum est 2, le 1$^{\text{re}}$ quartile est 6, la médiane est 12, le 3$^{\text{e}}$ quartile est 20 et le maximum est 31.

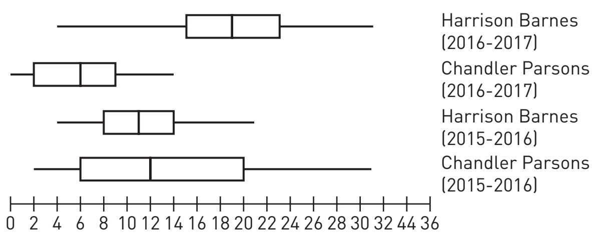
2.



3. a) C'est Barnes. On peut par exemple constater que l'écart interquartile lui correspondant est 6, qui est inférieur à 14 qui est celui correspondant à Parsons. Il en va de même pour l'étendue (17 contre 29).

b) Le diagramme en boîtes de Barnes est plus resserré que celui de Parsons, ce qui montre que les indicateurs sont plus proches les uns des autres (en particulier les quartiles).

B. 1.



2. Pour Parsons, le diagramme est clairement décalé vers la gauche ce qui signifie que tous les indicateurs de 2016-2017 sont (très nettement) inférieurs à ceux de 2015-2016 : il a régressé.

Pour Barnes, excepté le minimum qui est le même, le diagramme est clairement décalé vers la droite, ce qui signifie que tous les indicateurs de 2016-2017 sont (très nettement) supérieurs à ceux de 2015-2016 : il a progressé.

3. a) Oui car le 1$^{\text{er}}$ quartile correspondant à Barnes est 15 ce qui veut dire qu'il a marqué 15 points ou plus lors d'au moins 75 % des matchs, c'est-à-

```
import math
def calcul_moyenne_ecarttype(n):
    somme1 = 0
    somme2 = 0
    for i in range(1,n+1):
        x = float(input("Nouvelle valeur ?"))
        somme1 = somme1+x
        somme2 = somme2+x**2
    m=somme1/n
    s=math.sqrt(somme2/n-m**2)
    print("La moyenne est",m,"et l'écart-type est",s)
    compteur_intervalle=0
    print("Ressaisir les valeurs de la série :")
    for i in range(1,n+1):
        x = float(input("Nouvelle valeur ? "))
        if x>=m-2*s and x<=m+2*s:
            compteur_intervalle=compteur_intervalle+1
    print("Il y a ",(compteur_intervalle/n)*100,"% des valeurs dans [m-2s;m+2s].")
```

▶ TP3, programme de la question **B. 1.**

dire plus que le score maximal de Parsons qui est de 14 points.

b) Le rectangle (commençant à Q_1) du diagramme correspondant à Barnes est plus à droite que l'intégralité du diagramme correspondant à Parsons.

4. a) On peut penser que cet « objectif » de 13,7 points par match n'est pas atteint.

b) On voit qu'il a marqué au maximum 14 points lors de ses 25 % (en fait un peu moins mais ce n'est pas grave car c'est à son avantage) de meilleurs matchs, au maximum 9 points lors des 25 % suivants, etc. Sa moyenne est donc inférieure à $0{,}25 \times 14 + 0{,}25 \times 9 + 0{,}25 \times 6 + 0{,}25 \times 2 = 7{,}75$ points, bien loin des 13,7 points par match.

En autonomie p. 308-309

Utiliser la moyenne

76. c **77.** a **78.** a

79. $\dfrac{31{,}4 \times 1{,}58 + 13{,}3 \times 1{,}45}{31{,}4 + 13{,}3} \approx 1{,}54$ euro/litre

80. $m = \dfrac{1 \times 14 + 1 \times 15 + \ldots + 4 \times 34}{1 + 1 + \ldots + 4} \approx 27{,}2$ buts par journée en moyenne

81. La moyenne a été multipliée par c donc $10 \times c = 17$ donc $c = 1{,}7$.

82. 1. $\dfrac{0{,}5 \times 1 + 1{,}2 \times 6 + 3{,}8 \times 7 + 2 \times x}{0{,}5 + 1{,}2 + 3{,}8 + 2} = 6$ donne $x = 5{,}35$ après résolution.

2. $\dfrac{0{,}5 \times 1 + 1{,}2 \times 6 + 3{,}8 \times 7 + c \times 8}{0{,}5 + 1{,}2 + 3{,}8 + c} = 7{,}03$

$\Leftrightarrow 34{,}3 + 8c = 38{,}665 + 7{,}03c$ donne $c = 4{,}5$ après résolution

83. a) On considère la série 2 ; 3 et 7 de moyenne 4.

On ajoute 50 aux termes de la série, donc la moyenne est 50 + 4 = 54.

b) On considère la série 12 ; 1 et 5 de moyenne 6.

On multiplie par 100 les termes de la série, donc la moyenne est $100 \times 6 = 600$.

Utiliser l'écart-type

84. b **85.** a

86. Fabio fait toujours un nombre de pompes proche de 50 (car l'écart-type est petit) et Julie en fait parfois « nettement » plus et parfois « nettement » moins (car l'écart-type est plus grand).

87. Les valeurs de la série 3 sont globalement plus proches de la moyenne, celles de la série 1 un peu moins et celle de la série 2 nettement moins donc 1,1 est l'écart-type de la série 3 ; 2,5 celui de la série 1 et 11,1 celui de la série 2.

Utiliser l'écart interquartile

88. b. **89.** c. **90.** b.

91. a. **92.** c.

93. 1. Oui car $Q_3 = 22$. **2.** Oui car $Q_1 = 20$.

3. Car l'écart interquartile de 2010 est $22 - 20 = 2 < 3$ qui est l'écart interquartile en 2014.

L'étendue en 2010 est $28 - 18 = 10 < 30 - 17 = 13$ qui est l'étendue en 2014, également.

94. Par exemple : 1 ; 1 ; 2 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 34 ; 34 ; 34.

Décrire et différencier deux séries

95. b. **96.** a.

97. 1. Moyenne = 11, écart-type ≈ 1,84, $Q_1 = 10$, médiane = 11 et $Q_3 = 12$.

2. a) En 2017 : médiane = 11 et écart interquartile = 4. En 2018 : médiane = 11 et écart interquartile = 2. On peut penser que la promotion 2018 a des résultats plus homogènes en français car son écart interquartile est plus petit.

b) En 2017 : médiane = 12 et écart interquartile = 4. En 2018 : médiane = 13 et écart interquartile = 4. On peut penser que la promotion 2018 a des meilleurs résultats en histoire (mais aussi homogènes).

3. • En français, la moyenne est la même les deux années et l'écart-type est inférieur en 2018 : cela confirme que la promotion 2018 a des résultats plus homogènes.

• En histoire, la moyenne est légèrement supérieure en 2018, de même que l'écart-type, donc on peut penser que la promotion est un peu meilleure mais également un peu moins homogène.

CHAPITRE 13 Probabilités et échantillonnage

Manuel p. 310-345

I. Introduction

Objectifs du chapitre

Les élèves se sont familiarisés avec des notions élémentaires de probabilités au collège. La partie probabilités de ce chapitre s'attache à définir un cadre plus rigoureux pour l'exercice des probabilités à travers des questionnements sur la notion de modélisation d'une expérience aléatoire par une loi. Une distinction est clairement faite entre ce que représente un modèle posé sur la réalité et celle-ci, qu'il prétend traduire. Des arbres ou des tableaux à double entrée permettent de traiter des cas d'équiprobabilités. Les opérations sur les événements (réunion, intersection d'événements, contraire d'un événement) sont introduites. De ces définitions découlent des propriétés reliant les probabilités ; elles sont de plus le prétexte à travailler la logique, le raisonnement. Le travail sur la notion d'échantillonnage, avec une version vulgarisée de la loi des grands nombres, permet de justifier la démarche de modélisation à partir de fréquences observées ou d'estimation de paramètres inconnus. Ce chapitre est propice à la réalisation de nombreuses simulations, utilisant notamment Python.

Capacités

- → Modéliser une expérience aléatoire.
- → Calculer des probabilités en utilisant la loi de probabilité associée à l'expérience aléatoire, un tableau à double entrée ou un arbre de dénombrement.
- → Utiliser les notions de réunion, d'intersection et de contraire d'événements.
- → Comprendre le principe de la fluctuation d'échantillonnage et de l'influence de la taille des échantillons considérés.
- → Savoir simuler une expérience aléatoire à deux issues (ou plus précisément, simuler un événement et son contraire), puis un échantillon associé à une telle expérience aléatoire. En particulier, comprendre et savoir écrire un programme ou un algorithme renvoyant ou affichant l'effectif ou la fréquence d'une issue dans un échantillon.

II. Corrigés des activités et exercices

Pour prendre un bon départ p. 311

1. Calculer des fréquences

1. et **2.**

Couleur	Jaune	Blanc	Rouge
Fréquence	0,02	0,56	0,03
Fréquence en pourcentage	2 %	56 %	3 %

Couleur	Bleu	Vert	Noir
Fréquence	0,01	0,06 %	0,31 %
Fréquence en pourcentage	1 %	6 %	31 %

2. Calculer des pourcentages

1. $\frac{53}{87} \approx 60{,}9\ \%$ **2.** $\frac{22}{32}$

3. Calculer des effectifs

1. $778\,200 \times \frac{84{,}5}{100} = 657\,579$ candidats.

2. $778\,200 \times \frac{9}{10} = 700\,380$ candidats.

4. Dénombrer

1. Il y a $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1\,000$ codes possibles.

2. Il y a $26 \times 10^4 = 260\,000$ codes possibles.

5. Calculer des probabilités

1. La probabilité est de $\frac{2}{5}$.

2. La probabilité est de $\frac{1}{7}$.

Activités p. 312-315

Activité 1. Modéliser une expérience aléatoire

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Comprendre le principe d'une modélisation d'une expérience aléatoire.

A. 1. La probabilité serait de 0,5.

2.

Issue	Pile	Face
Probabilité	0,5	0,5

3. Non, elle est imparfaite.

B. 1. Une loi de probabilité pourrait être :

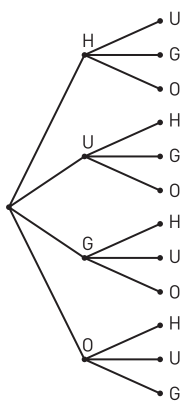
Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,198	0,208	0,185	0,409

2. Non, elle est imparfaite elle aussi.

Activité 2. Utiliser un arbre de dénombrement

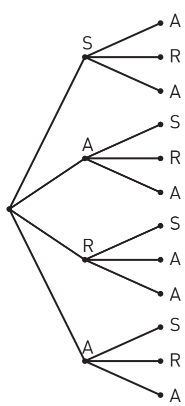
- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Introduire les arbres de dénombrement permettant de lister toutes les issues d'une expérience aléatoire.

1. a)



b) Il y a douze issues. **c)** La loi est équirépartie.

2. a)



b) Cette expérience a huit issues.

c) Non, nous ne sommes pas dans une situation d'équiprobabilité (il y a deux A).

Activité 3. Travailler avec un tableau à double entrée

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Exploiter des données et construire un tableau à double entrée.

1.

	Frites	Haricots vert	Navets	Total
Boeuf	588	108	70	766
Colin	252	108	104	464
Total	840	216	174	1 230

2. a) $\frac{29}{205}$ **b)** $\frac{42}{205}$ **c)** $\frac{526}{615}$

3. a) $\frac{63}{116}$ **b)** $\frac{3}{10} = 0{,}3$

Activité 4. Travailler les notions d'union et d'intersection

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Travailler les opérations sur les événements.

1. $A = \{2\ ;4\ ;6\ ;8\ ;10\ ;12\}$

$B = \{3\ ;6\ ;9\ ;12\}$

2. a) $A \cap B = \{6\ ;12\}$

b) $A \cup B = \{2\ ;3\ ;4\ ;6\ ;8\ ;9\ ;10\ ;12\}$

c) $\overline{A} = \left\{1;3;5;7;9;11\right\}$

d) $\overline{A \cup B} = \left\{1;5;7;11\right\}$

e) $\overline{A \cap B} = \left\{1;2;3;4;5;7;8;9;10;11\right\}$

f) $\overline{A} \cap B = \left\{3;9\right\}$

g) $\overline{A} \cap \overline{B} = \left\{1;5;7;11\right\}$

h) $\overline{A} \cup \overline{B} = \left\{1;2;3;4;5;7;8;9;10;11\right\}$

3. On a $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. a) Le numéro est pair et est un multiple de 3.

b) Le numéro est pair ou est un multiple de 3.

c) Le numéro est impair.

d) Le numéro est impair et n'est pas un multiple de 3.

e) Le numéro est impair ou n'est pas un multiple de 3.

f) Le numéro est impair et est un multiple de 3.

Activité 5. Simuler une expérience aléatoire

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectifs :** Découvrir les commandes Python en lien avec la bibliothèque `random` qui permettent d'obtenir des nombres aléatoires.

Découvrir le principe de la simulation d'une expérience aléatoire.

Trouver un critère sur le nombre généré aléatoirement pour que la probabilité que ce critère soit vérifié soit la même que la probabilité d'un événement de l'expérience aléatoire simulée.

1. Elle permet de générer un nombre (réel ou décimal) aléatoire entre 0 et 1.

0 est inclus et 1 exclu formellement. On peut le préciser, mais ça n'a pas vraiment d'importance pour la simulation.

2. Les probabilités sont proportionnelles à l'amplitude (la taille) de l'intervalle associé à l'événement dans [0 ; 1[.

- Probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à 0,5 : 0,5 (amplitude de [0 ; 0,5] : 0,5 et amplitude de [0 ; 1[: 1).
- Probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à 0,25 : 0,25.
- Probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{5}$.

3. Lorsque l'on lance un dé équilibré à 6 faces, la probabilité d'obtenir 6 est $p = \frac{1}{6}$, c'est-à-dire la même que la probabilité que le résultat de `random.random()` soit inférieur ou égal à $\frac{1}{6}$.

4. Il suffit d'écrire `1/6` à la place des pointillés.

5. a) • `random.randint(1,4)` génère un entier aléatoire entre 1 et 4.

• `random.randint(5,12)` génère un entier aléatoire entre 5 et 12.

b)

```
import random
print("le résultat est",random.randint(1,10))
```

Activité 6. Découvrir la fluctuation d'échantillonnage

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de fluctuation d'échantillonnage.

1. Autour de $500 \times \frac{24,5}{100} \approx 123$.

2. a) Voir la feuille de calcul.

b) … entre 0 et 1 et en considérant que si ce nombre est inférieur ou égale à 0,245…

c) On obtient un échantillon de taille 500.

d) Le résultat correspond au nombre de personnes de moins de 20 ans dans l'échantillon de 500 personnes simulé sur la plage `A2:A501`.

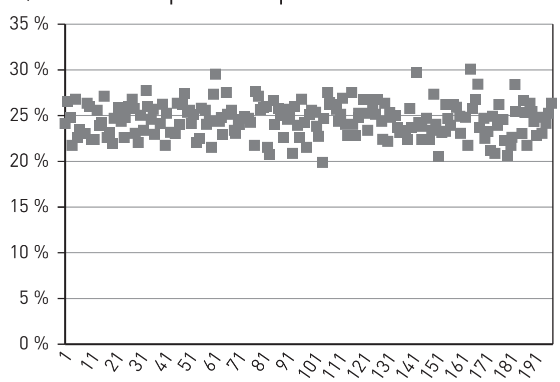
e) Le résultat doit être assez proche (à plus ou moins 25 près).

f) La valeur en A502 est modifiée mais reste « autour de 123 ».

g) `=A502/500` convient (on peut mettre la cellule au format pourcentages).

3. a) Voir la feuille de calcul.

b) On obtient par exemple :



c) Les fréquences se situent essentiellement dans [0,2 ; 0,3].

Activité 7. Estimer un paramètre

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectifs :** Découvrir le principe de l'estimation d'un paramètre à partir d'échantillons (partie A).

Se tester sur ce type d'estimation (partie B).

A. 1. Voir le programme.

2. Voir le programme en pied de page.

3. a) • Échantillon n° 80 : environ 12 % des foyers reçoivent la fibre optique.

• Échantillon n° 20 : environ 9,1 % des foyers reçoivent la fibre optique.

b) Autour de 11 %.

c) 11 % correspond à la proportion de foyers recevant la fibre optique dans la population.

B. Il n'y a pas vraiment de correction possible. Il faut essayer de trouver la valeur de *p* sur laquelle est centré le nuage de points.

À vous de jouer ! p. 321-325

1.

Issue	Rouge	Bleu	Jaune
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

2.

Issue	Bleu	Rouge
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

3. La probabilité est de 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,6.

4. 1. La probabilité est de 0,35.

2. La probabilité est de 0,2.

5. On note la somme des résultats des deux lancers dans un tableau.

1er lancer / 2^{e} lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilité est donc de $\frac{18}{36} = 0{,}5$.

6.

Issue	1	2	4	8
Probabilité	0,125	0,375	0,375	0,125

7. 1.

Issue	0,7	1,2	1,5	2,2	2,5	3
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. La probabilité est de $\frac{2}{3}$.

8. 1. $p(\text{S}) = \frac{43}{180}$; $\text{P}(\text{F}) = \frac{85}{180} = \frac{17}{36}$;

$p(\overline{\text{F}}) = 1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$; $p(\overline{\text{R}}) = 1 - p(\text{R}) = 1 - \frac{56}{180} = \frac{31}{45}$.

2. F ∩ S : La personne est une femme qui danse le swing.

$$p(\text{F} \cap \text{S}) = \frac{26}{21+13+26+25+35+15+17+28} = \frac{13}{90}$$

F ∪ S : La personne est une femme ou une personne qui danse le swing.

$p(\text{F} \cup \text{S}) = \frac{102}{180} = \frac{17}{30}$

```
import random
effectif=0

for i in range(1,1001):
    if random.random() <= 0.11:
        effectif=effectif+1
print((effectif/1000)*100,"% des foyers reçoivent la fibre optique dans cet échantillon.")
```

Programme Python de l'activité 7, question **A. 2.**

9. 1. La somme des résultats obtenus est en premier, le produit est en second.

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1	2 ; 1	3 ; 2	4 ; 3	5 ; 4
2	3 ; 2	4 ; 4	5 ; 6	6 ; 8
3	4 ; 3	5 ; 6	6 ; 9	7 ; 12
4	5 ; 4	6 ; 8	7 ; 12	8 ; 16

2. $p(\text{A}) = \dfrac{3}{16}$ et $p(\text{B}) = \dfrac{3}{16}$.

3. A ∩ B : « la somme et le produit sont égaux à 4 » ; A ∪ B : « la somme ou le produit sont égaux à 4 ».

4. $p(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{1}{16}$ et $p(\text{A} \cup \text{B}) = \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{16} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{5}{16}$.

10. En langage naturel :

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 400
    Si Alea()⩽0,496
      effectif←effectif+1
    Fin si
Fin pour
Afficher effectif
```

En langage Python :

```
import random
def simul():
    effectif=0
    for i in range(1,401):
        if random.random() <=0.496:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

11. En langage naturel :

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 899
    Si Alea()⩽0,5
      effectif←effectif+1
    Fin si
Fin pour
Afficher 899-effectif
```

En langage Python :

```
import random
def simul():
    effectif=0
    for i in range(1,900):
        if random.random() <=0.5:
            effectif=effectif+1
    return 899-effectif
```

On pourrait afficher effectif directement à la fin puisque la probabilité que le résultat du dé soit impair est également 0,5.

12. On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,44, donc on peut estimer cette probabilité à $p = 0{,}44$ (mais 0,45 ne serait pas faux par exemple).

13. $p = 0{,}82$ par exemple.

Exercices d'application p. 326-330

Apprendre à apprendre

14. Les issues doivent être celles qui sont associées à l'expérience aléatoire et la somme de leurs probabilités doit être 1. S'il y a un modèle physique facilement associable à l'expérience aléatoire en question, les probabilités ne doivent pas être trop éloignées de la théorie pour être cohérent.

15. Leur somme est 1.

16. 1. *Fluctuer* veut dire « changer, varier, être modifié ».

2. Lorsque l'on tire au sort deux échantillons de même taille associés à la même expérience, les résultats sont différents, ils varient d'un échantillon à l'autre.

Questions - Flash

17. $p(6) = 0{,}2$

18. $p(\text{A} \cup \text{B}) = 0{,}8$

19. $p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0{,}1$

20. $\overline{\text{C}}$: « La pièce n'est pas une tour et elle est noire. »

21. La probabilité est de $\frac{1}{2}$.

22. L'événement contraire est : « Lenny a répondu juste à au plus une question. »

23. La probabilité d'obtenir une boule rouge est de 0,3125, la probabilité d'obtenir une boule verte est de 0,6875.

```
import random
a=random.random()
if a<=0.3125:
    print("rouge")
else:
    print("vert")
```

24.

```
Pour i allant de 1 à 30
    Si Alea()⩽0,3
      Afficher "CUIR"
    Sinon
      Afficher "Pas CUIR"
    Fin Si
Fin Pour
```

Modéliser une expérience aléatoire

25. 1. a) L'univers est $\Omega = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14\}$.

b) Elle possède sept issues.

2. L'univers est $\Omega = \{6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30\}$.

Elle possède cinq issues.

26. Ω = {marche ; bus ; vélo ; voiture}.

27. 1. Non.

2. La probabilité d'obtenir une face bleue est de $\frac{1}{2}$, une face blanche de $\frac{1}{3}$ et une face rouge de $\frac{1}{6}$.

28.

Issue	Rouge	Vert	Orange
Probabilité	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{1}{14}$

29. 1. L'univers est $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

2. Il y a six issues. **3.** Non.

30. 1. $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

2. Il y a six issues.

3. Non.

Déterminer une probabilité dans un cadre non équiprobable

31. a) $\frac{3}{100} + \frac{5}{100} + \frac{21}{100} = \frac{29}{100}$

b) $\frac{3}{100} + \frac{5}{100} = \frac{8}{100}$

c) $\frac{3}{100} + \frac{6}{100} + \frac{5}{100} = \frac{14}{100}$

32. 1. La probabilité est de 0,02.

2. La probabilité est de 0,05 + 0,15 + 0,28 = 0,48.

33. 1. La probabilité est de 0,05 + 0,395 = 0,445.

2. La probabilité est de 0,055.

Déterminer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité

34. 1. $\frac{1}{52}$ **2.** $\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

35. 1. La probabilité est de $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

2. La probabilité est de $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

36. 1. La probabilité est de $\frac{46}{249}$.

2. La probabilité est de $\frac{77}{249}$.

3. La probabilité est de $\frac{181}{249}$.

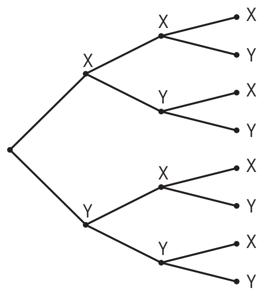
Utiliser un arbre ou un tableau

37. On note la somme des résultats des deux lancers dans un tableau.

1er lancer / 2e lancer	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

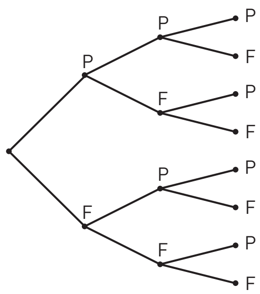
La probabilité est de $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

38. 1.



2. La probabilité est de $\frac{1}{4}$.

39. 1.

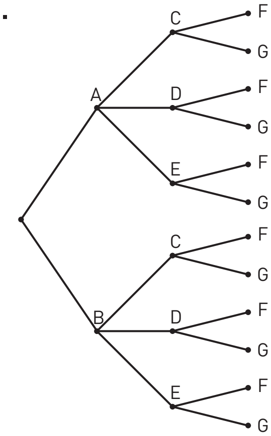


2. a) La probabilité est de $\frac{1}{8}$.

b) La probabilité est de $\frac{1}{2}$.

c) La probabilité est de $\frac{1}{2}$.

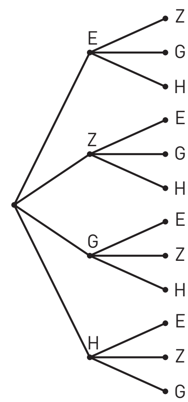
40. 1.



2. 12 menus possibles.

3. a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{3}$

41. 1.



2. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{4}$

Réunion, intersection et événements contraires

42. a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$ **b)** $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$

c) A et B sont incompatibles donc
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}22 = 0{,}62$.

43. $p(\overline{A}) = \frac{5}{7}$

44. a) « Il ne porte pas de chaussures noires. »

b) « Il porte des chaussures noires et n'utilise jamais de parapluie. »

c) « Il porte des chaussures noires ou n'utilise jamais de parapluie. »

45. 1. $p(\overline{A}) = 0{,}8$ **2.** $p(A \cup B) = 0{,}75$

46. 1. a) R ∩ E : « Le livre choisi est un roman emprunté. »

R ∪ E : « Le livre choisi est un roman ou est emprunté. »

b) $p(R \cap E) = \dfrac{1}{3}$ $p(R \cup E) = \dfrac{1}{2}$

2. a) $\overline{R}$: « Le livre choisi n'est pas un roman. »

b) $p(\overline{R}) = \dfrac{7}{12}$

Simuler une expérience aléatoire à deux issues

47.

```
Si Alea()⩽0,27
  Afficher "A téléchargé illégalement"
Sinon
  Afficher "N'a pas téléchargé illégalement"
Fin si
```

48.

```
if random.random() <= 0.97:
    print("Pas CSC")
else:
    print("CSC")
```

49. 1. On tire au sort un réel aléatoire x entre 0 et 1 :

• si $x \leqslant 0{,}35$ on considère que la personne souffre d'obésité ;

• si $x > 0{,}35$, on considère que la personne ne souffre pas d'obésité.

2. On tire au sort un réel aléatoire x entre 0 et 1 :

• si $x \leqslant 0{,}4$ on considère que la personne souffre d'obésité ;

• si $x > 0{,}4$, on considère que la personne ne souffre pas d'obésité.

50. On tire au sort un réel aléatoire x entre 0 et 1 :

• si $x \leqslant 0{,}582$ on considère que le bachelier n'a pas poursuivi ses études à l'université ;

• si $x > 0{,}582$, on considère que le bachelier a poursuivi ses études à l'université.

51. 1.

```
Si Alea() ⩽ 17/32
    Afficher "Fille"
Sinon
    Afficher "Garçon"
Fin si
```

2.

```
import random
if random.random() <= 17/32:
    print("Fille")
else:
    print("Garçon")
```

Simuler un échantillon associé à une expérience aléatoire à deux issues

52. 1. a) La variable `effectif` vaut 4 en fin d'algorithme (elle est incrémentée 4 fois car 0,52 ; 0,89 ; 0,23 et 0,28 sont inférieurs ou égaux à 0,904 mais pas 0,95).

b) Cela correspond au nombre de lancers-francs réussis sur les 5 simulés.

2.

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 350
  Si Alea()⩽0,904
    effectif←effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif
```

53. 1. a)

```
Pour i allant de 1 à 100
  Si Alea()⩽0,418
      Afficher "Université"
  Sinon
    Afficher "Pas université"
  Fin si
Fin pour
```

b)

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 100
  Si Alea()⩽0,418
    effectif←effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif
```

2. On remplace simplement la 2^{e} ligne par :
`Pour i allant de 1 à 1 316`

54. 1.

```
import random
for i in range(1,201):
    if random.random() <= 0.35:
        print("Souffre d'obésité")
    else:
        print("Ne souffre pas d'obésité")
```

2.

```
import random
effectif=0
for i in range(1,201):
    if random.random() <= 0.35:
        effectif=effectif+1
print(effectif)
```

3.

```
import random
effectif=0
for i in range(1,201):
    if random.random() <= 0.4:
        effectif=effectif+1
print(effectif)
```

55. 1. En langage naturel :

```
Pour i allant de 1 à 2000
  Si Alea()⩽0,27
    Afficher "a téléchargé"
  Sinon
    Afficher "n'a pas téléchargé"
  Fin si
Fin pour
```

En langage Python :

```
import random
for i in range(1,2001):
    if random.random() <= 0.27:
        print("a téléchargé")
    else:
        print("n'a pas téléchargé")
```

2. En langage Python :

```
import random
def non_telecharge():
    effectif=0
    for i in range(1,2001):
        if random.random() <= 0.27:
            effectif=effectif+1
    return 2000-effectif
```

56. 1. En langage naturel :

```
Pour i allant de 1 à 991
  Si Alea()⩽0,03
    Afficher "CSC"
  Sinon
    Afficher "pas CSC"
  Fin si
Fin pour
```

En langage Python :

```
import random
for i in range(1,992):
    if random.random() <= 0.03:
        print("CSC")
    else:
        print("pas CSC")
```

2. En langage Python :

```
import random
def csc():
    effectif=0
    for i in range(1,992):
        if random.random() <= 0.03:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

Estimer une probabilté ou une proportion

57. 1. On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,3, donc on peut estimer cette probabilité d'obtention du 6 à $p = 0,3$ (ou une valeur relativement proche de 0,3).

2. Non, car pour un dé non truqué, $p(6) = \frac{1}{6}$ donc $3p(6) = \frac{1}{2} > 0,3$.

58. 1. 0,6 **2.** Autour de 60 %.

3. On pourrait prendre des échantillons de taille plus grande (les 1 000 derniers clients plutôt que les 50 derniers par exemple) ou prendre plus d'échantillons (on obtiendrait une « bande plus dense » dont on pourrait plus facilement observer une « valeur centrale »).

Modéliser à partir de fréquences

59. 1. Autour de 11 %.

2. a) D'après la question **1.** :

Issue	Malade	Pas malade
Probabilité	0,11	0,89

b) Non, ce n'est pas la seule, on peut imaginer que les probabilités soient différentes mais probablement peu éloignées de celles obtenues ici.

60. 1. On peut estimer la probabilité d'obtenir une boule verte à environ 0,49.

2. $p(\text{rouge}) + p(\text{bleu}) + p(\text{vert}) = 1$

3.

Issue	Rouge	Bleu	Vert
Probabilité	0,34	0,17	0,49

4. a)

Issue	Rouge	Bleu	Vert
Probabilité	0,33	0,16	0,51

b) Cela illustre le principe de la fluctuation d'échantillonnage.

61.

Issue	Oui	Non	Peut-être
Probabilité	0,256	0,471	0,273

62.

Issue	Victoire	Match nul	Défaite
Probabilité	0,0625	0,0875	0,85

63.

Issue	Rouge	Bleu	Vert	Jaune
Probabilité	$\frac{41}{150}$	$\frac{47}{150}$	$\frac{38}{150}$	$\frac{24}{150}$

Calculs et automatismes

64. a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{1}{12}$

65. a) $p(A) = 0,8$ **b)** $p(A) = 0,45$

c) $p(A) = 0,85$ **d)** $p(A) = 0,16$

Exercices d'entraînement p. 331-336

Modéliser une expérience aléatoire

66. Par exemple :

a) Joséphine prend au hasard un bonbon dans un sachet qui en contient des noirs, des bleus, des rouges et des jaunes en quantités égales.

b) Jocunda arrive en scooter devant un feu de signalisation et observe la couleur du feu.

c) Carlos choisit au hasard un haut dans son armoire au moment de s'habiller.

67. Par exemple :

- On observe la somme des deux dés.
- On observe le produit des deux dés.
- On observe le quotient du plus petit nombre par le plus grand.
- On observe l'écart entre les deux résultats obtenus.
- On observe le plus grand des deux résultats obtenus.

68. Elle peut répondre de neuf façons différentes.

Événements et issues

69. 1. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16\}$.

2. a) $\{1 ; 3 ; 9\}$ **b)** $\{6 ; 8 ; 9 ; 12 ; 16\}$ **c)** $\{2 ; 3\}$

70. 1. $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ **2.** $\{0 ; 3\}$

71. $E = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ $F = \{5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ $G = \{6 ; 7 ; 8\}$

Vocabulaire des événements

72. a) « La carte est une figure de cœur » ; 3 issues.

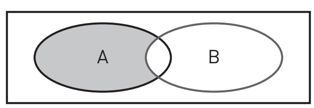
b) « La carte est une figure ou un cœur » ; 17 issues.

c) « La carte n'est pas un cœur mais est une figure » ; 9 issues.

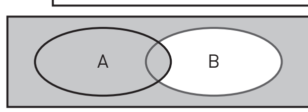
d) « La carte n'est ni un cœur ni une figure. » ; 15 issues.

73. a) $G \cap R$ **b)** $R \cap \overline{G}$ **c)** $R \cup G$ **d)** $\overline{R} \cap \overline{G}$

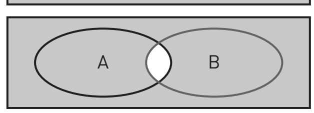
74. a)

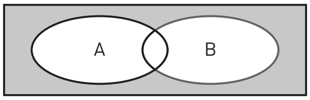


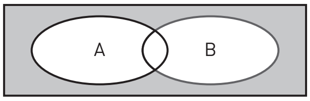
b)

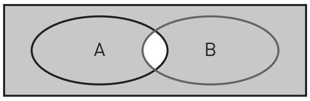


c)



d)


e)


f)


75. 1. a) « Le résultat du dé est impair. »
b) « Le résultat du dé est inférieur ou égal à 4. »
c) « Le résultat du dé est 1, 2 ou 4. »
2. a) « Le résultat du dé est 6. »
b) « Le résultat du dé est 3 ou 5. »
c) « Le résultat du dé est 2 ou 4. »

Expériences aléatoires multiples

76. 1. $\Omega = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$

2.

Issue	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. La probabilité est de $\frac{1}{2}$.

4. La probabilité est de $\frac{5}{16}$.

77. 1. Six rangements sont possibles.
2. a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 0
3. La probabilité est de $\frac{1}{3}$.

78. 1. Elle peut être verte, bleue ou jaune.

2.

Issue	Jaune	Bleue	Verte
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Calcul de probabilités avec réunion, intersection et événement contraire

79. a) $p(\overline{A}) = 0,3$ **b)** $p(A \cup B) = 0,9$
c) $p(\overline{A} \cap B) = 0,2$

80. a) $p(S \cap T) = 0,2$ **b)** $p(\overline{S \cup T}) = 0,1$
c) $p(\overline{S \cap T}) = 0,8$

81. La probabilité est de 0,3.

82. $p(A \cup B) = 0,8$.

83. 1. Non
2. a) $p(A \cap B) = 0,38$ **b)** $p(A \cap \overline{B}) = 0,42$

84. Ce n'est pas possible car $p(V) + p(F) < p(V \cup F)$.

85. Ce n'est pas possible car $p(V \cap F) > p(F)$.

86. Cela est possible si $F \subset V$.

87. Ce n'est pas possible car $P(F \cup V) < p(V)$.

88. 1. a) 0,08 **b)** 0,25 **c)** 0,115
2. 0,50 **3.** 0,805 **4.** 0,383

89. a) La probabilité est de 0,6.
b) La probabilité est de 0,5.
c) La probabilité est de 0,8.

90. 1.

Issue	Aucun défaut	Deux défauts	Uniquement un défaut clavier	Uniquement un défaut écran
Probabilité	0,971	0,015	0,009	0,005

2. $p(E) = 0,02$; $p(C) = 0,024$; $p(E \cap C) = 0,015$.
3. a) Le premier se traduit par $E \cup C$, le second par $E \cap \overline{C}$.
b) $p(E \cup C) = 0,029$ et $p(E \cap \overline{C}) = 0,005$.

91. 1.

Le conducteur…	était un homme	était une femme	Total
était sous l'emprise de l'alcool	574	144	718
n'était pas sous l'emprise de l'alcool	1 250	432	1 682
Total	1 824	576	2 400

2. a) $p(F) = 0{,}24$ **b)** $p(A) \approx 0{,}30$

c) « Le conducteur était une femme sous l'emprise de l'alcool » ; $p(A \cap F) = 0{,}06$.

d) $p(A \cup F) \approx 0{,}48$

e) « Le conducteur était un homme qui n'était pas sous l'emprise de l'alcool » ; $p(A \cup F) \approx 0{,}52$.

3. La probabilité est de $\frac{574}{718}$.

92. 1. $p(C) = 0{,}3$ et $p(M) = 0{,}7$.

2. a) $\bar{A}$: « L'élève est parti après 9 h 15. »

$M \cup A$: « L'élève est parti avant 9 h 15 ou a eu la moyenne au contrôle. »

$\bar{M} \cap B$: « L'élève n'a pas eu la moyenne au contrôle et est parti entre 9 h 15 et 9 h 45. »

b) $p(\bar{A}) = 0{,}9$ $p(M \cup A) = 0{,}798$ $p(\bar{M} \cap B) = 0{,}098$

3. La probabilité qu'il ait la moyenne est de 0,98.

Situations de non équiprobabilité

93. a) $t = 0{,}7$ **b)** $t = 0{,}2$ **c)** $t = 0{,}15$ **d)** $t = \frac{1}{21}$

94. 1. $p(6) = 0{,}1$ **2. a)** 0,4 **b)** 0,4

95. 1. La probabilité qu'elle retombe sur le pont est $\frac{400 - 12{,}5\pi}{400}$.

2. La probabilité est de $\frac{1}{4}$.

96. 1.

Issue	29,9	30	30,1	30,2
Probabilité	0,075	0,835	0,065	0,025

2. 0,835 **3.** 0,025

97. 1.

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,375

2. La probabilité est de 0,625.

98. $t = \frac{1}{2}$

Simuler une expérience aléatoire ou un échantillon

99. 1. On affiche le résultat de `EntAlea(1,6)`.

2. Il affiche les résultats correspondant à un échantillon de 10 lancers d'un dé à 6 faces.

3.

```
Pour i allant de 1 à 100
  Si EntAlea(1,6)=4
    Afficher "GAGNÉ"
  Sinon
    Afficher "PERDU"
  Fin si
Fin pour
```

100. 1. On simule un entier aléatoire entre 1 et 8 avec `EntAlea(1,8)`:

- si le résultat est inférieur ou égal à 3, on considère que la boule est rouge ;
- sinon, on considère que la boule est jaune.

2.

```
Pour i allant de 1 à 30
  Si EntAlea(1,8)⩽3
    Afficher "rouge"
  Sinon
    Afficher "jaune"
  Fin si
Fin pour
```

101. 1. Elle simule l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à considérer la somme des deux résultats obtenus.

2.
```
def trois_des(n):
    a=random.randint(1,n)
    b=random.randint(1,n)
    c=random.randint(1,n)
    return a*b*c
```

3. Elle simule un échantillon de taille p associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer trois dés équilibrés à n faces numérotées de 1 à n et à considérer le produit des trois résultats obtenus.

102. 1.
```
def f1():
    a=random.random()
    if a <= 0.42:
        print("Rouge")
    if a > 0.42 and a <= 0.69:
        print("Jaune")
    if a > 0.69 :
        print("Vert")
```

2.
```
def echantillon_f1():
    for i in range(100):
        f1()
```

Simulation avec effectifs ou fréquences

103. 1. En langage naturel :

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 50
  Si Alea()⩽0,64
    effectif←effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif
```

En langage Python :

```
def ex103_effectif():
    effectif=0
    for i in range(50):
        if random.random() <= 0.64:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

2. En langage naturel

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 50
  Si Alea()⩽0,64
    effectif←effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif/50
```

En langage Python :

```
def ex103_frequence():
    return ex103_effectif()/50
```

Pour les élèves plus rapides, on peut prolonger l'exercice en demandant de modifier la fonction Python de sorte que l'on puisse choisir le nombre de couverts (en tant que paramètre ou en saisie utilisateur).

104. 1. En langage naturel :

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 98
  Si Alea()⩽0,5
    effectif←effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif
```

En langage Python :

```
def ex104_effectif():
    effectif=0
    for i in range(98):
        if random.random() <= 0.5:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

2. En langage naturel :

```
effectif← 0
Pour i allant de 1 à 98
  Si Alea()⩽ 0,5
    effectif← effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif/98
```

En langage Python :

```
def ex104_frequence():
    return ex104_effectif()/98
```

105. En langage naturel :

```
effectif←0
Pour i allant de 1 à 1324
  Si Alea()⩽0,213
    effectif←effectif+1
  Fin si
Fin pour
Afficher effectif/1324
```

En langage Python :

```
def ex105():
    effectif=0
    for i in range(1324):
        if random.random() <= 0.213:
            effectif=effectif+1
    return effectif/1324
```

Stabilisation des fréquences

106. • Pour Sofiane, on cherche un graphique du type de celui présent dans le paragraphe 5 du cours où le nuage est centré sur $\frac{1}{8} = 0{,}125$ (les abscisses des points vont de 1 à 50) : c'est donc le graphique 3.

• Pour Andréa, on cherche un graphique dans lequel les abscisses des points vont de 1 à 5 000 et qui représente une fréquence se stabilisant autour de $\frac{1}{8} = 0{,}125$: c'est donc le graphique 1.

« Normalité » d'un échantillon

107. 1. $\frac{1}{6}$

2. $\frac{191}{1\,000} = 0{,}191$ et $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$: les deux nombres sont relativement proches mais pas « excessivement ». On ne peut pas vraiment statuer avec ces résultats sur l'équilibre du dé.

3. On constate qu'une fréquence supérieure ou égale à 0,191 est assez rare (mais possible : de l'ordre de 2 % du temps ici) : on peut donc raisonnablement douter de l'équilibre du dé.

Ici, on est dans un cas limite donc toute réponse autre mais correctement argumentée est recevable.

108. 1. $f = \frac{58}{63} \approx 0{,}92$, soit environ 92 %.

2. Pas forcément, mais c'est assez nettement supérieur à 87 %.

3. D'après la simulation, on constate que 58 pandas ou plus qui survivent n'est pas si fréquent que ça, 10 sur 100 échantillons dans cette simulation, soit 10 %, mais on ne peut pas dire que c'est exceptionnel.

L'idée n'est pas de répondre fermement à la question, « est-ce exceptionnel ? » car il n'y a pas vraiment de bonne réponse, mais de sensibiliser les élèves au fait qu'il est intéressant de quantifier si un écart de 5 % par rapport à la valeur théorique est fréquent ou non dans le cas d'un échantillon de taille 63.

109. 1. $p = 0{,}3$.

2. Il y a 30 % de tickets dorés d'après le graphique, donc $400 \times 0{,}3 = 120$.

3. Ici, $n = 400$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{400}} = 0{,}05$.

Il s'agit donc d'abord de trouver le nombre d'échantillons dans lesquels la fréquence est entre 0,25 et 0,35 : il y en a 47 sur 50, soit 94 % d'échantillons où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

4. a) La fréquence minimale de tickets dorés dans un échantillon de 400 barres chocolatées semble être proche de 0,23, ce qui correspond à $400 \times 0{,}23 = 92$ tickets dorés, donc oui, normalement, il pourra amener ses 88 amis.

b) Non, pour les mêmes raisons (140 tickets dorés correspondent à $f = 0{,}35$, ce qui n'est quasiment jamais atteint).

110. 1. a) 0,315

b) Environ 0,33, car le nuage semble être centré sur cette valeur.

2. a) $\frac{88}{200} = 0{,}44$

b) Cela n'arrive jamais sur les 50 échantillons.

c) Son accusation semble légitime.

3. a) f devrait être dans $\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{200}} ; \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{200}}\right]$.

b) Sur les 50 échantillons simulés, cela arrive 47 fois, soit pour 94 % des échantillons.

Travailler autrement

111. $p(\overline{A}) + p(\overline{B}) = p(\overline{A} \cap \overline{B}) + 1 - p(A \cap B)$

112. La probabilité est de $\frac{1}{17\ 576\ 000}$.

113. Par exemple : Zahira lance un dé à 20 faces numérotées de 1 à 20.

Les événements A : « le résultat est supérieur ou égal à 5 » et B : « le résultat est un multiple de 3 » conviennent.

114. La probabilité est de $\frac{1}{6}$ dans les deux cas.

Exercices bilan p. 337-338

115. Probabilités pour filtrer des messages

1.

	Spams	Courriels bienvenus	Total
Couriels éliminés	1 330	12	1 342
Couriels conservés	70	588	658
Total	1 400	600	2 000

2. $p(B) = 0{,}3$ et $p(E) = 0{,}671$.

3. La probabilité est de 0,7.

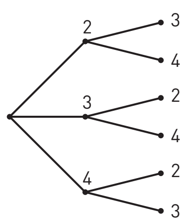
4. $B \cap E$: « Le courriel est bienvenu et éliminé. »
$E \cap \overline{B}$: « Le courriel est un spam et est éliminé. »

5. $p(B \cap E) = 0{,}006$; $p(E \cap \overline{B}) = 0{,}665$.

6. La probabilité est de 0,041.

116. Tirage sans remise

1.



2. La loi est équirépartie.

3. $p(A) = \frac{2}{3}$; $p(B) = \frac{1}{3}$; $p(C) = 1$.

4. $A \cap B$: « La première boule est paire et la seconde est impaire » ; $p(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

$A \cup B$: « La première boule est paire ou la seconde est impaire » ; $p(A \cap B) = \frac{2}{3}$.

5. a) $\overline{D}$: « Tous les chiffres sont pairs. »

b) $p(\overline{D}) = \frac{1}{3}$ **c)** $p(D) = \frac{2}{3}$

117. Lancer de dé tétraédrique

1. $\frac{9}{16}$ **2.** $\frac{7}{16}$ **3.** $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

118. Boisson chaude

A. 1.

Issue	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,55
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Issue	0,6	0,7	1,05	1,1	1,2	1,5
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. La probabilité est de $\frac{1}{2}$.

B. 1. La probabilité est de $\frac{2}{3}$.

2. Florian a plus de chance de boire un café.

119. Tirage avec remise

1. Il y a 25 issues.

2. La probabilité est de $\frac{1}{5}$.

3. La probabilité d'avoir un multiple de 3 est de $\frac{9}{25}$; celle d'avoir un multiple de 9 est de $\frac{2}{25}$.

120. En phase d'apprentissage

1. a) 24 **b)** $\frac{1}{24}$ **c)** $\frac{1}{4}$

2. La probabilité est de $\frac{1}{6}$.

3. Il peut écrire 3 mots différents ; la probabilité qu'il l'écrive correctement est de $\frac{1}{3}$. La probabilité que le mot commence par B est de $\frac{2}{3}$ et la probabilité qu'il l'écrive correctement sachant qu'il a commencé par B est de $\frac{1}{2}$.

121. Résultats du bac

1.

Élèves	Garçons	Filles	Total
Réussite	138	185	323
Échec	33	24	57
Total	171	209	380

2. a) $\overline{R}$: « L'élève n'a pas eu son baccalauréat. »

b) $\overline{G} \cap R$: « L'élève est une fille qui a eu son baccalauréat. »

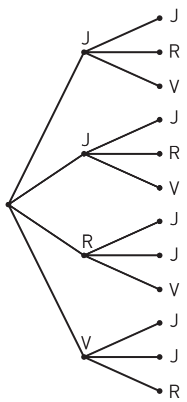
3. a) $p(\overline{R}) = 0{,}15$ **b)** $p(\overline{G} \cap R) \approx 0{,}49$

c) $p(G \cup \overline{R}) \approx 0{,}91$

4. La probabilité est de 0,57.

122. À l'urne

1.



2. Il y a 12 tirages possibles.

3. a) $p(R) = \frac{1}{4}$ et $p(J) = \frac{1}{2}$.

b) $R \cap J$: « Le premier jeton est rose et le second est jaune. »

$p(R \cap J) = \frac{1}{6}$

c) $p(R \cup J) = \frac{7}{12}$

4. a) $p(N) = \frac{1}{6}$

b) $\overline{N}$: « Au moins un des jetons est jaune. »

c) $p(\overline{N}) = \frac{5}{6}$

123. Le mauvais lot ?

1. On tire au sort un nombre réel p au hasard entre 0 et 1 et on considère :

– que le téléviseur passe par le SAV si $p \leqslant 0{,}073$;

– que le téléviseur ne passe pas par le SAV sinon.

2.

```
def sav():
    effectif = 0
    for j in range(1,525):
        if random.random() <= 0.073:
            effectif = effectif + 1
    return effectif / 524
```

3. a) Le premier (en rouge) car le nuage semble à peu près centré sur 0,073.

b) Sauf exception, on peut s'attendre à avoir entre 4 % et 11 % de retours en SAV sur un échantillon de 524 téléviseurs de cette marque.

4. a) $\frac{63}{524} \approx 0{,}12$, soit un taux de retour d'environ 12 %. D'après la question **3. b)**, c'est anormalement élevé.

b) $\frac{45}{524} \approx 0{,}086$, soit un taux de retour d'environ 8,6 %. D'après la question **3. b)**, c'est tout à fait normal.

Exercices d'approfondissement p. 339

124. Trouver *n*

Les probabilités d'obtenir une boule orange sont :

- 0 si $n = 0$;
- 0,125 si $n = 1$;
- 0,25 si $n = 2$;
- 0,375 si $n = 3$;
- 0,5 si $n = 4$;
- 0,625 si $n = 5$;
- 0,75 si $n = 6$;
- 0,875 si $n = 7$;
- 1 si $n = 8$.

Ici cette probabilité semble être légèrement supérieure à 0,6, donc $n = 5$.

125. Joyeux anniversaire !

La probabilité est de $\frac{1}{1\,461}$.

126. Lancer de trois dés

Les combinaisons **a)** et **c)** sont les plus probables.

127. En trois dimensions

La probabilité est de 0,875.

128. Plusieurs jeux possibles

1.

Issue	P	F
Probabilité	0,5	0,5

2.

Issue	PP	PF	FP	FF
Probabilité	0,25	0,25	0,25	0,25

3.

Issue	PP	FP	FF
Probabilité	0,25	0,5	0,25

129. De la logique jusqu'au bout des doigts

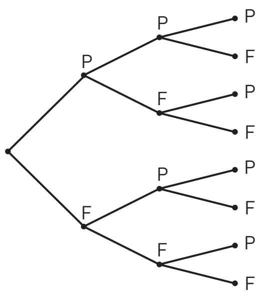
a) 0,2 **b)** 0,5 **c)** 0,8
d) 0,6 **e)** 0,1 **f)** 0,4
g) 0,9 **h)** 0,4 **i)** 0,9

130. À la piscine

1. 0,42 **2.** 0,21

Vers la 1re

131. 1.



2. X peut valoir 0, 1, 2 ou 3.

3.

Valeur de X	0	1	2	3
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

132. 1. 0,583 **2.** 0,583
3. Non, cela ne change rien.

Travaux pratiques p. 340-343

TP 1. Algorithme de Monte-Carlo

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Utiliser un algorithme pour approximer une aire par une méthode probabiliste.

A. 1. a) Il faut avoir $-3 \leqslant x \leqslant 4$ et $-4 \leqslant y \leqslant 3$.

b) Il faut avoir $-3 \leqslant x \leqslant -1$ et $-2 \leqslant y \leqslant 3$.

2. La probabilité est de $\frac{10}{49}$.

3.
```
import random
x=random.uniform(-3,4)
y=random.uniform(-4,3)
if x<-1 and y>-2:
    print("Il y est")
else:
    print("Il n'y est pas")
```

B. 1. a) L'aire du disque est de π et l'aire du carré est de 4.

b) Le couple $(x\,;y)$ doit vérifier $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

c) Le couple $(x\,;y)$ doit vérifier $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1$, ce qui revient à $x^2+y^2 \leqslant 1$.

2. a) La probabilité est de $\frac{\pi}{4}$.

b)
```
import random
n=int(input("n"))
eff_interieur_disque=0
for i in range (0,n):
    x=random.uniform(-1,1)
    y=random.uniform(-1,1)
    if x*x+y*y<1:
        eff_interieur_disque=eff_interieur_disque+1
Pi=eff_interieur_disque/n*4
print(Pi)
```

c) Voir l'ordinateur ou la calculatrice. **d)** Non.

TP 2. Le chevalier de Méré

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** Utiliser la simulation pour estimer une probabilité autrement difficile à calculer.

A. 1. Il semble très difficile de se faire une idée sur ce qui est le plus probable.

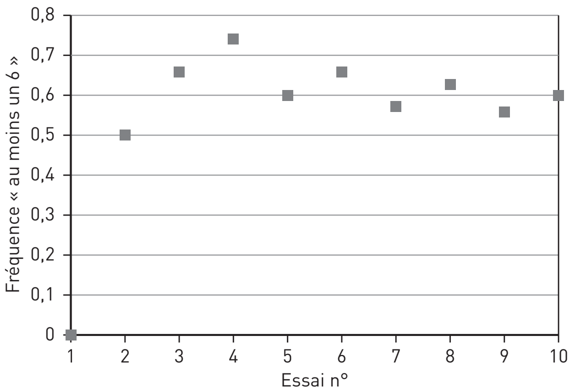
2. a)

i	**x**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
dé 1	x	5	2	4	3	3
dé 2	x	1	1	3	6	3
dé 3	x	2	6	2	1	2
dé 4	x	1	2	6	6	5
Effectif 6	0	0	1	2	3	3
Fréquence 6	x	0	1/2	2/3	3/4	3/5

i	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
dé 1	6	1	4	2	1
dé 2	5	2	1	2	1
dé 3	1	4	4	2	1
dé 4	3	4	6	4	6
Effectif 6	4	4	5	5	6

Fréquence 6	4/6	4/7	5/8	5/9	6/10

b)



3. Voir le programme.

4. Voir le programme.

5. C'est le deuxième car on y observe une stabilisation des fréquences vers la probabilité cherchée (ce qu'on avait commencé à entrevoir question **2. b)**).

6. La probabilité qu'on obtienne au moins un 6 semble être légèrement supérieure à 0,5, donc il semble plus probable qu'on en obtienne au moins un que l'on n'en obtienne pas.

B. 1.

```
import random

nb_essais = int(input("Nombre d'essais ? "))
effectif = 0
for i in range(1,nb_essais+1):
    de1 = random.randint(1,6)
    de2 = random.randint(1,6)
    de3 = random.randint(1,6)
    if de1 + de2 + de3 == 12:
        effectif = effectif+1
    print(effectif/i)
```

2. On doit obtenir un résultat proche de 0,12 (la « vraie » probabilité est $\frac{25}{216}$).

TP 3. Surréservation

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Illustrer le principe de la fluctuation d'échantillonnage et essayer de déterminer une fréquence minimale « raisonnable » dans un échantillon.

1.

Il faut bien comprendre qu'une personne est un passager avec une probabilité 0,85 d'après l'énoncé.

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt

def freq_echantillon(n):
    nb_passager=0
    for j in range(1,n+1):
        if random.random() <= 0.85:
            nb_passager=nb_passager+1
    return nb_passager/n

for i in range(1,201):
    f=freq_echantillon(400)
    plt.plot([i],[f],'r.')
plt.show()
```

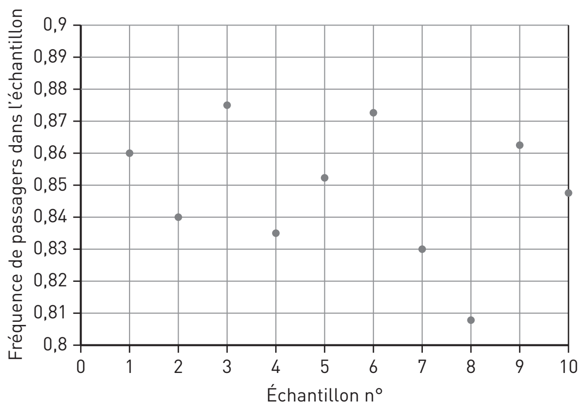
2. a) Voir le programme précédent.

b) Ce programme simule 200 échantillons de 400 personnes […] où i est le numéro de l'échantillon et f_i la fréquence de passagers dans l'échantillon.

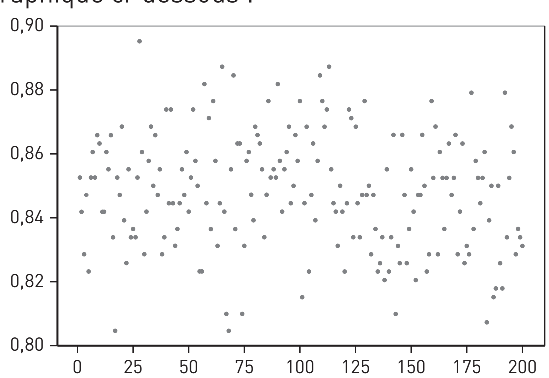
c)

Échantillon n°	1	2	3	4	5
Nb de passagers	0,86	0,84	0,875	0,835	0,853

Échantillon n°	6	7	8	9	10
Nb de passagers	0,873	0,83	0,808	0,863	0,848



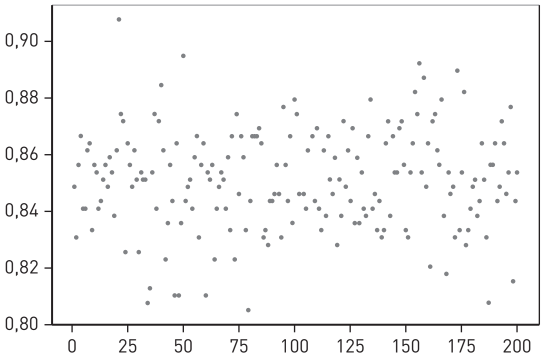
d) Entre 0,8 et 0,9 (mais ça peut varier) avec le graphique ci-dessous :



e) Au maximum, il faut 360 passagers sur 400 personnes ayant acheté un billet donc la fréquence maximale est $\frac{360}{400} = 0{,}9$.

f) À adapter au graphique obtenu. Pour celui donné en **2.d)**, ils ne refuseront personne.

Avec un autre graphique comme celui ci-dessous, ce serait 1 sur 200 soit 0,5 % :



3. a) 0,85 **b)** 0,05

c) Dans [0,85 – 0,05 ; 0,85 + 0,05], soit [0,8 ; 0,9].

d) À adapter au graphique obtenu.

- Sur le 1er exemple : dans 0 % des échantillons.
- Sur le 2e exemple : dans 0,5 % des échantillons.

Cette dernière question est différente de la question **2. f)** car on doit aussi considérer les échantillons où la fréquence est inférieure à 0,8.

TP 4. Une marche aléatoire sur une pente glissante

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier une marche aléatoire.

1. Il faudra au moins 10 déplacements.

2. a) b) c) d) e) Voir la feuille de calcul.

f) Il faut entrer `=C2+B3`.

g) h) Voir la feuille de calcul.

TP 5. L'affaire Partida

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** « Justifier » un soupçon de discrimination sur un exemple concret à l'aide de la simulation.

1. 0,791

2. a) Voir la feuille de calcul.

b) Car la probabilité d'obtenir 1 est 0,791, c'est-à-dire la même que celle qu'un juré soit d'origine mexicaine. Ainsi, dans ce cas, on simule chaque juré en considérant que 1 correspond à un juré d'origine mexicaine et que 0 correspond à un juré qui n'est pas d'origine mexicaine. La somme de toutes ces valeurs est donc le nombre de 1, c'est-à-dire le nombre de jurés d'origine mexicaine parmi les 870 jurés simulés.

c) Oui car $870 \times 0{,}791 \approx 688$, soit (normalement) une valeur proche de celle en A871.

3. a) Voir la feuille de calcul.

b) Cela dépend des nombres aléatoires générés mais on peut s'attendre à une valeur autour de 640-660. Ainsi, quand on simule 100 jurys similaires à ceux de ce comté, le nombre de jurés d'origine mexicaine obtenus dans ces simulations est systématiquement très supérieur aux 339 personnes d'origine mexicaine effectivement tirés au sort parmi les 870 jurés sur cette période.

c) Autour de 640 environ normalement.

d) Après de nombreuses simulations, on n'obtient jamais un nombre de jurés d'origine mexicaine proche des 339 effectivement obtenus. On peut penser que les jurés n'ont donc pas été tirés au hasard.

En autonomie p. 344-345

Utiliser une loi de probabilité et modéliser

133. a

134. Il y a 6 boules rouges, 6 boules vertes et trois boules bleues.

Issue	Rouge	Vert	Bleu
Probabilité	0,4	0,4	0,2

135. Il y a 120 passages en tout.

Issue	Mésange	Merle
Probabilité	0,2	0,475

Issue	Rouge-gorge	Non identifié
Probabilité	$\frac{13}{120}$	$\frac{13}{60}$

136. 1. $1 - (0{,}5 + 0{,}15 + 0{,}3) = 0{,}05$

2. La probabilité est de $0{,}5 + 0{,}15 + 0{,}3 = 0{,}95$.

137.

Issue	Pile	Face
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Calculer une probabilité

138. c **139. a** et **d**

140. La probabilité est de $\frac{1}{6}$.

141. La probabilité d'obtenir un multiple de 7 est de $\frac{13}{90}$.

142. Il y a $2 \times 3 \times 5 = 30$ menus différents.

143. Tableau des sommes

1er lancer / 2^{e} lancer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tableau des produits

1er lancer / 2^{e} lancer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

La probabilité d'avoir un nombre premier est de $\frac{15}{36}$ avec une somme et de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ avec un produit : on a donc plus de chance d'avoir un nombre premier avec la somme.

Travailler avec réunion, intersection et contraire

144. b et **c**

145. 1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$= 0,7 + 0,4 - 0,3 = 0,8$

2. $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$

146. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,4 + 0,2 - 0,5 = 0,1$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

147. 1. $P(A) = \frac{266\,430}{571\,870} \approx 0,47$

2. a) $C \cap A$: le véhicule choisi est de marque A et a un contrôle technique conforme.

b) $P(C \cap A) = \dfrac{\frac{92}{100} \times 266\,430}{571\,870} \approx 0,4286$

3. $P(C \cap \bar{A}) = \dfrac{\frac{94}{100} \times 305\,440}{571\,870} \approx 0,5021$

$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap \bar{A}) = 0,4286 + 0,5021 \approx 0,93$

Comprendre les notions de simulation et fluctuation

148. b **149. a**

150. 1.

```
eff_gaucher←0
Pour i allant de 1 à 200
   Si alea()⩽0,12
      eff_gaucher←eff_gaucher+1
   Fin si
Fin pour
Afficher eff_gaucher
```

2.

```
eff_gaucher←0
Pour i allant de 1 à 200
   Si alea()⩽0,12
      eff_gaucher←eff_gaucher+1
   Fin si
Fin pour
freq_gaucher=eff_gaucher/200
Afficher freq_gaucher
```

151. 1. On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,45, donc on peut estimer cette proportion à $p = 0,45$, soit 45 %.

2. On remarque que sur tous les hôpitaux, la fréquence du groupe O est au maximum 0,51 environ. Dans cet hôpital, elle est de $\frac{324}{500} = 0,648$, soit 64,8 %, ce qui est nettement supérieur à 51 %, donc on peut penser qu'il y a une erreur.

Achevé d'imprimer