Bilan d'apprentissages Correction 20 points

Cours 4 points

1) Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. 0,5 pt

2) Le discriminant d'un trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$. 0,5 pt

3) La forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c$ 1,5 pt

4) On appelle racine d'un trinôme toute valeur qui annule le trinôme. 0,5 pt

5) Les racines x_1 et x_2 d'un trinôme du second degré, lorsqu'elles existent, sont : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. 1 pt

Automatismes 7 points + 1 point pour la figure illustrée

1) Déterminons le discriminant de $-2x^2 - 6x + 3$. 0,5 pt

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-2)(3) = (6)^2 + 4(6) = (6 + 4)(6) = 60.$

2) Déterminer, après avoir calculé le discriminant, les racines de $x^2 + 2x - 15$. 1,5 pt

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64 > 0.$

Les racines x_1 et x_2 du trinôme sont :

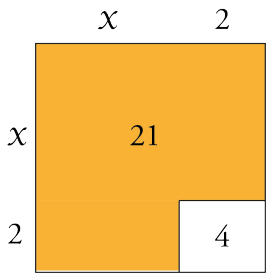
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2(1)} = \frac{-10}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

3) Factorisons $x^2 + 2x - 15$. 0,5 pt

D'après la question 2), 3 et -5 étant les deux racines du trinôme, on a :

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

4) Déterminons la solution positive de l'équation $x^2 + 4x = 21$. 2,5 pt



D'après la figure, on a : $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = 21 + 4 = 25$.

Donc : $x + 2 = 5$, d'où : $x = 3$.

5) Démontrons que $x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1$. 0,5 pt

$(x+3)^2 - 1 = x^2 + 2x(3) + 3^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 - 1 = x^2 + 6x + 8$.

6) Démontrons que $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$. 0,5 pt

$(x+2)(x+4) = x^2 + 4x + 2x + 8 = x^2 + 6x + 8$.

7) Tableau de signe du trinôme $x^2 + 6x + 8$. 1 pt

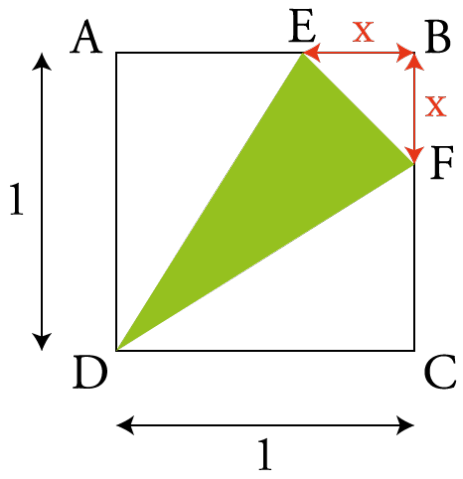
D'après la question 6), les racines du trinôme sont -4 et -2.

Or le signe du trinôme est le signe de $-a$ entre les racines, d'où le tableau de signe :

x	-∞		-4		-2		+∞
Signe du trinôme		+	0	-	0	+	

Problème 6 points + 2 points pour méthode, rigueur et rédaction

ABCD est un carré de côté 1. On place les points E et F respectivement sur les côtés [AB] et [BC] tels que $EB = BF = x$.



1. On a : $x \in [0,1]$ car $0 \leq x \leq AB = 1$. 0,5 pt

2. Exprimons en fonction de x les aires A_1, A_2 et A_3 des triangles EBF, FCD et AED. 1,5 pt

   On a : $A_1 = \frac{EB \times BF}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{1}{2}x^2$

   De plus : $A_2 = \frac{CD \times CF}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$

   Enfin : $A_3 = \frac{AE \times AD}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2} = A_2$.

3. Montrons que l'aire $A(x)$ du triangle EFD en fonction de x est : $-\frac{x^2}{2} + x$. 1 pt

   On a : $A(x) = 1 - (A_1 + A_2 + A_3) = 1 - (A_1 + 2A_2) = 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\left(\frac{1-x}{2}\right)\right)$

   Donc : $A(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - x\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + x = -\frac{x^2}{2} + x$.

4. Résolvons l'équation $A(x) = 0$. 1 pt

   $A(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + x = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{x}{2} + 1\right)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $-\frac{x}{2} + 1 = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

   L'équation possède deux solutions 0 et 2.

5. Démontrons que $A(x) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux valeurs à préciser. 1 pt

   La forme représentée est la forme canonique de $A(x) = -\frac{x^2}{2} + x$.

   avec : $a = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$ et $\beta = A(\alpha) = A(1) = -\frac{1^2}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

   Donc : $A(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$

6. Montrons que $A(x) \leq \frac{1}{2}$. 1 pt

   $A(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \leq \frac{1}{2}$.