Fonctions et opérations sur les fonctions

1. Définition

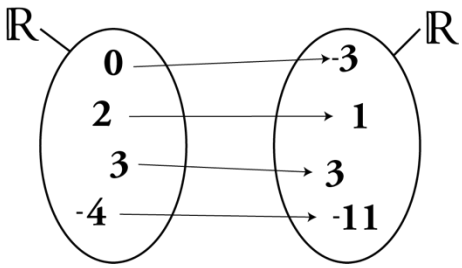
Une fonction f est un "objet mathématique abstrait" qui associe à un nombre réel x, un nombre réel $f(x)$.

On représente généralement une fonction f par un schéma tel que ci-dessous :

$$x \xmapsto{f} f(x)$$

Pour définir une fonction f, on précise d'une manière explicite la valeur de l'image par la fonction f du nombre x.

Ainsi, écrire par exemple que $f(x) = 2x - 3$ revient à définir d'une manière explicite la fonction affine f qui, à tout réel x, associe le nombre réel $2x - 3$.



2. 1. Produit d'une fonction par un nombre kf

Soit f une fonction définie sur un domaine. On appelle fonction kf la fonction qui associe à tout réel x, le nombre réel $(kf)(x)$ où $(kf)(x) = k \times f(x)$.

$$x \xmapsto{kf} kf(x) = k \times f(x)$$

Exemples

Soit $f(x) = 2x$. On a : $f(x) = 2u(x)$ avec $u(x) = x$. On dit que : $f = 2u$.

Soit $g(x) = 3x^2$. On a : $g(x) = 3u(x)$ avec $u(x) = x^2$. On dit que : $g = 3u$.

2.2. Dérivée du produit d'une fonction par un nombre kf

Soit f une fonction définie et dérivable sur un domaine, k étant un nombre réel.

On note kf la fonction qui est définie par $(kf)(x) = k \times f(x)$.

La dérivée de la fonction kf est la fonction $(kf)'$ définie par $(kf)'(x) = k \times f'(x)$.

On dit que $(kf)' = kf'$.

Application à la dérivation

Soit $f(x) = 2x$. On a : $f(x) = 2u(x)$ avec $u(x) = x$.

Donc : $f'(x) = 2u'(x) = 2x$ car $u'(x) = 1$.

Soit $g(x) = 3x^2$. On a : $g(x) = 3u(x)$ avec $u(x) = x^2$.

Donc : $g'(x) = 3u'(x) = 3(2x) = 6x$ car $u'(x) = 2x$.

Soit $h(x) = 2\sqrt{x}$. On a : $h(x) = 2u(x)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$.

Donc : $h'(x) = 2u'(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ car $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. 1. Somme $f + g$ de deux fonctions f et g

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine. On appelle fonction $f + g$ la fonction qui associe à tout réel x, le nombre réel $(f + g)(x)$ où $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

$$x \xmapsto{\text{f+g}} (\text{f+g})(x) = \text{f}(x) + \text{g}(x)$$

Exemple

Soit $f(x) = x^2 + 2x$.

On a : $f(x) = u(x) + v(x) = (u + v)(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x$.

On dit que : $f = u + v$.

3.2. Dérivée de la somme $f + g$ de deux fonctions f et g

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine.

La dérivée de la fonction $f + g$ est la fonction $(f + g)'$ où $(f + g)' = f' + g'$ définie par :

$$(f + g)'(x) = (f' + g')(x) = f'(x) + g'(x).$$

Application à la dérivation

Soit $f(x) = x^2 + 2x$.

On a : $f(x) = u(x) + v(x) = (u + v)(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x$

Ici : $f = u + v$.

Comme $f' = (u + v)' = u' + v'$, on a : $f'(x) = (u + v)'(x) = (u' + v')(x) = u'(x) + v'(x)$.

Donc : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + 2$ car $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$.