cours autour de la dérivation

I. Nombre dérivé et tangente

1. Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et a + h étant deux nombres réels de l'intervalle I, h ≠ 0.

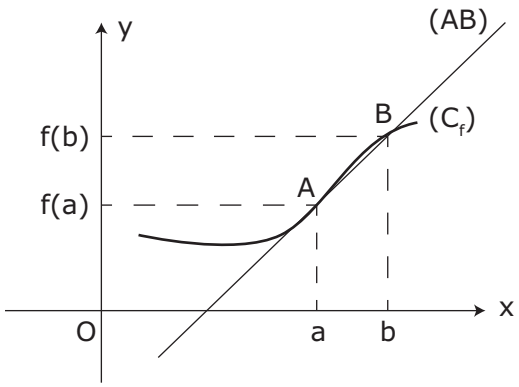
On appelle taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre a et a + h le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

D'une manière générale, le taux d'accroissement de f entre a et b, a et b étant deux réels de l'intervalle I, est le rapport :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

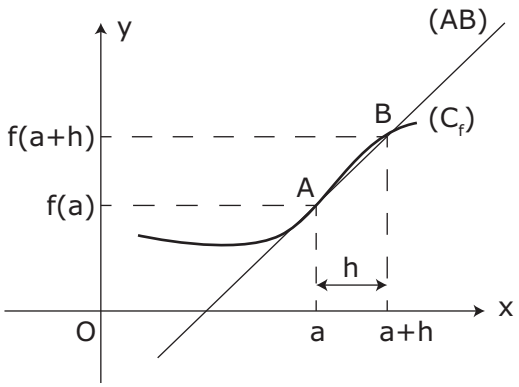
Interprétation géométrique du taux d'accroissement d'une fonction f entre deux nombres a et b d'un intervalle I.

Considérons la courbe (C_f) représentative de la fonction f sur l'intervalle I.



Les points A(a ; f(a)) et B(b ; f(b)) sont deux points de la courbe (C_f). Le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b est tout simplement le coefficient directeur de la droite (AB).

En particulier, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et a + h est le coefficient directeur de la droite passant par A(a ; f(a)) et un point B de la courbe (C_f), point dont l'abscisse est située à un distance h de l'abscisse a du point A.



2. Nombre dérivé d'une fonction f en a

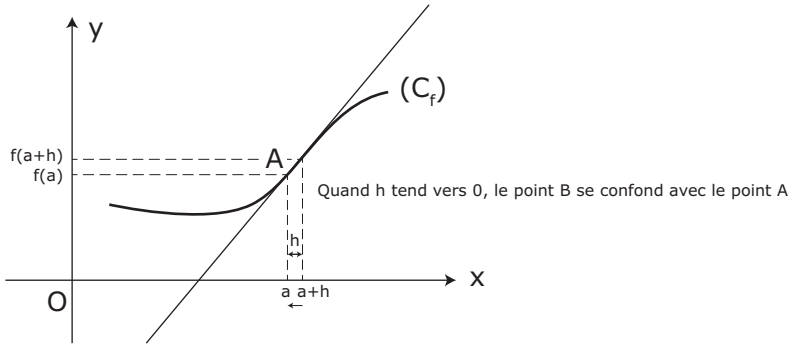
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et a + h étant deux nombres réels de l'intervalle I, h ≠ 0.

La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel L lorsque h tend vers 0.

On écrit : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$

Ce nombre réel L est appelé nombre dérivé de f en a ; on le note $f'(a)$.

On appelle nombre dérivé $f'(a)$ la limite, si elle existe, du taux de variation de la fonction f entre a et a + h lorsque h tend vers 0.



Dit simplement, le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la courbe $(C_f)/y = f(x)$ au point de la courbe d'abscisse a et d'ordonnée f(a).

3. Tangente à la courbe (C_f) au point de la courbe d'abscisse a

3.1. Définition de la tangente à (C_f) au point de la courbe d'abscisse a

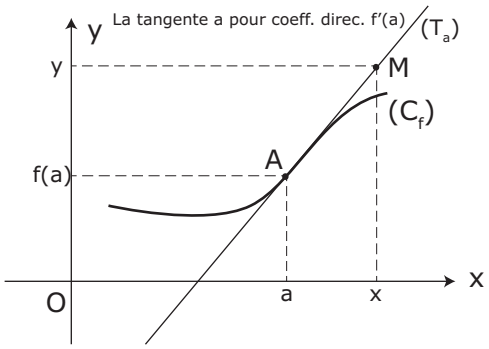
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a de l'intervalle I, le plan étant rapporté à un repère donné.

La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A de la courbe d'abscisse a est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur (ou pente) est $f'(a)$.

3.2. Corollaire

Le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur ou pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse a.

3.3. Équation de la tangente à (C_f) au point de la courbe d'abscisse a



On considère la tangente (T_a) à la courbe (C_f) au point A de la courbe d'abscisse a.

Soit M(x ; y) un point quelconque de la tangente (T_a). Le coefficient directeur de la tangente, droite passant par A(a ; f(a)) et M(x ; y) est donné par :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{y - f(a)}{x - a}$$

Or, la tangente (T_a) est la droite passant par A dont le coefficient directeur est f'(a).

Donc : $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$

Il vient alors la relation : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

D'où : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ → Équation réduite de la tangente (T_a)

L'équation de la tangente (T_a) à la courbe (C_f) au point A de la courbe d'abscisse a s'obtient par la relation générale : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

4. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si f est dérivable en tout nombre réel de l'intervalle I.

La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction qui, à tout nombre réel x de l'intervalle I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.