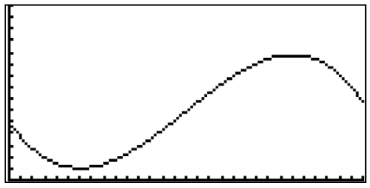
5 Applications de la dérivation

Découvrir

1 Signe de la dérivée et sens de variation

1 **a)** $f(0) = 500$ et $f(30) = 680$.
L'action coûte 500 € en début d'étude et 680 € en fin d'étude.

b)



c) On conjecture que le prix de l'action décroît sur l'intervalle $[0\,;6]$, puis croît sur l'intervalle $[6\,;24]$ et enfin décroît sur l'intervalle $[24\,;30]$.

2 **a)** f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;30]$ et pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;30]$,
$f'(t) = -t^2 + 30t - 144$.
$\Delta = 30^2 - 4 \times (-1) \times (-144) = 324$
et $\sqrt{\Delta} = 18$
$t_1 = \dfrac{-30-18}{2\times(-1)} = 24$ et $t_2 = \dfrac{-30+18}{2\times(-1)} = 6$.

b) Le signe de $f'(t)$ est celui d'une fonction polynôme du second degré, on déduit donc le tableau de variations de f.

t	0		6		24		30
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	500	↘	104	↗	1 076	↘	680

c) On constate que le prix de l'action est décroissant sur les intervalles où $f'(t) \leqslant 0$ et que le prix de l'action est croissant sur l'intervalle où $f'(t) \geqslant 0$.

2 Signe de la dérivée et maximum

1 **a)** $h(0) = 2$ donc le poids est lancé à 2 m de hauteur.

b) On peut conjecturer que la hauteur maximale atteinte par le poids est 5,2 m et que le poids se trouve à la distance horizontale de 8 m de ses pieds.

2 **a)** h est dérivable sur $[0\,;+\infty[$
et $h'(x) = -0{,}1x + 0{,}8$.
$h'(x) = 0$ si et seulement si, $x = 8$.
Ainsi $h'(x) \geqslant 0$. pour $0 < t \leqslant 6$ et $h'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 6$.

b) $h'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;8]$ donc h est croissante sur $[0\,;8]$.
$h'(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 8$ donc h est décroissante sur $[8\,;+\infty[$.
h admet donc un maximum en $x = 8$.

c) $h(8) = 5{,}2$ donc la hauteur maximum atteinte par le poids est 5,2 m.

3 $h(x) = 0$ si et seulement si
$-0{,}05x^2 + 0{,}8x + 2 = 0$.
$\Delta = \dfrac{26}{25} = 1{,}04$ $x_0 \approx 18{,}2$ et $x_1 \approx -2{,}2$.
La longueur du lancer de l'athlète est environ 18 m.

Acquérir des automatismes

3 Par lecture graphique :
• pour tout nombre réel x de $[-2\,;\,-1]$ et de $[1\,;2]$, $g'(x) \geqslant 0$. Donc g est croissante sur chacun des intervalles $[-2\,;\,-1]$ et $[1\,;2]$.
• pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$ et $[2\,;3]$, $g'(x) \leqslant 0$. Donc g est décroissante sur chacun des intervalles $[-1\,;1]$ et $[2\,;3]$.

4 **a)** h est une fonction polynôme donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $h'(x) = 3x^2 + 3$.
Pour tout nombre réel x, $3x^2 + 3 > 0$ donc $h'(x) > 0$.
b) Ainsi, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5 **a)** $k(x) = -3x^3 - 20x$
k est une fonction polynôme donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $k'(x) = -9x^2 - 20$.
Pour tout nombre réel x, $-9x^2 - 20 < 0$ donc $k'(x) < 0$.
b) Ainsi, la fonction k est décroissante sur $\mathbb{R}$.
c) $498 < 501{,}5$ donc $k(498) > k(501{,}5)$.

8 k est une fonction polynôme donc k est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$k'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3) = 3(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$
$k'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
On utilise le signe de $ax^2 + bx + c$ pour dresser le tableau de variations de la fonction k.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$		↗	$6\sqrt{3}$	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	

$k\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$.
Ici k est impaire donc $k\left(-\sqrt{3}\right) = -k\left(\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$.

9 m est une fonction polynôme donc m est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$m'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x + 2)(x - 2)$
$m'(x) = 0$ si, et seulement, $x = 2$ ou $x = -2$.
On utilise le signe de $ax^2 + bx + c$ pour dresser le tableau de variations de la fonction m.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$m'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$m(x)$		↘	-16	↗	16	↘	

$m(-2) = 8 - 24 = -16$.
Ici m est impaire donc $m(2) = -m(-2) = 16$.

10 g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et $\Delta > 0$.
$x_1 = \dfrac{-(-2) + 4}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-(-2) - 4}{2} = -1$
Le signe de $ax^2 + bx + c$ permet de dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	10	↘	-22	↗	

D'après ce tableau, $g(-1) = 10$ est un maximum local de la fonction g et $g(3) = -22$ est un minimum local de g.

11 h est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x, $h'(x) = -x^2 + 8x - 7$
$\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 36$ et $\Delta > 0$.
$x_1 = \dfrac{-8 + 6}{2 \times (-1)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-8 - 6}{2 \times (-1)} = 7$
Le signe de $ax^2 + bx + c$ permet de dresser le tableau de variations de la fonction h.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↘	$-\frac{10}{3}$	↗	$\frac{98}{3}$	↘	

D'après ce tableau, $h(1) = -\dfrac{10}{3}$ est un minimum local de la fonction h et $h(7) = \dfrac{98}{3}$ est un maximum local de h.

14 g est la somme de deux fonctions dérivables sur $[-5\,;\,-2]$ donc g est dérivable sur $[-5\,;\,-2]$. Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 4 + \dfrac{1}{x^2}$. Pour tout nombre réel x, $g'(x) > 0$.

x	-5		-2
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-19{,}8$	↗	$-7{,}5$

On obtient d'après le tableau de variations que $g(-5) = -19{,}8$ est le minimum de g sur $[-5\,;\,-2]$ et $g(-2) = -7{,}5$ est le maximum de g donc pour tout réel x de $[-5\,;\,-2]$, $-19{,}8 \leqslant g(x) \leqslant -7{,}5$.

15 **a)** h est une fonction polynôme de second degré donc pour tout t, $h'(t) = -4t + 5$.

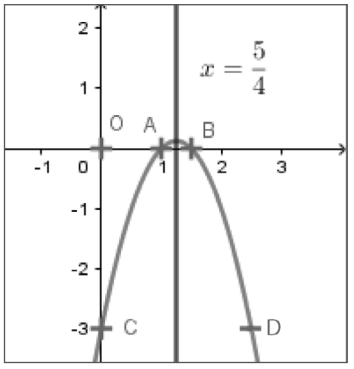
$h'(t) = 0$ si et seulement si, $-4t + 5 = 0$ soit $t = \dfrac{5}{4}$.

h' est une fonction affine ; on complète le tableau ci-dessous.

t	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$		↗	$\frac{1}{8}$	↘	

b) L'équation $-2t^2 + 5t - 3 = 0$ a une solution évidente, 1, et sa seconde racine est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$

On place d'abord le sommet $S\left(\dfrac{5}{4}\,;\,\dfrac{1}{8}\right)$, puis les points d'intersection avec l'axe des abscisses $A(1\,;0)$ et $B\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$. On peut placer un autre point $C(0\,;\,-3)$. Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{5}{4}$ on place aussi $D\left(\dfrac{5}{2}\,;\,-3\right)$.



16 $f'(x)$ est positif sur les intervalles $[-3\,;1]$ et $[3\,;4]$.
$f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1\,;3]$.

17 $f'(-2)$ est positif et $f'(3)$ est négatif.

18 Faustine a tort car f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$ $(f'(x) \geqslant 0)$ et f est décroissante sur $[0\,;1]$ $(f'(x) \leqslant 0)$.

19 $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

20 Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
L'affirmation (2) est donc vraie.

21

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3	↘	1	↗	

22

x	-5		-3		2		3		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

23 **a)** On peut conjecturer que les entiers -1 et 2 sont solutions de l'équation $g'(x) = 0$
b) On peut conjecturer le signe de $g'(x)$ dans le tableau ci-dessous.

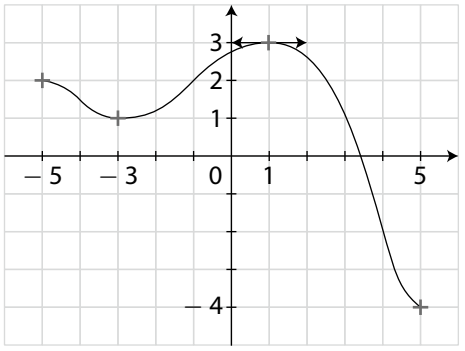
x	-3		-1		2		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

24 **a)** $h(0) < 0$
b) $h'(0) > 0$
c) $h(-3) > 0$
d) $h'(-3) < 0$
e) $h(2{,}5) > 0$
f) $h'(-2{,}5) < 0$

25 $f'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ donc f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.
$f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[-1\,;4]$ donc f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

26 **a)** • f est décroissante sur les intervalles $[-5\,;\,-3]$ et $[1\,;5]$ donc $f'(x) \leqslant 0$ sur ces intervalles.
• f est croissante sur l'intervalle $[-3\,;1]$ donc $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[-3\,;1]$.

b)



27 • f est croissante sur les intervalles $[-3\,;\,-2]$ et $[0\,;2]$ donc $f'(x) \geqslant 0$ sur les intervalles $[-3\,;\,-2]$ et $[0\,;2]$.
Seule la courbe ❸ vérifie cela donc on fait correspondre ❶ à ❸.
• g est croissante sur les intervalles $[-3\,;\,-1]$ et $[1\,;2]$ donc $g'(x) \geqslant 0$ sur les intervalles $[-3\,;\,-1]$ et $[1\,;2]$.
Seule la courbe ❶ vérifie cela donc on fait correspondre ❷ à ❶.
• Finalement ❸ correspond à ❷.

28 **a)** h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,
$h'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 6x + \frac{128}{3}$
$\Delta = -\frac{188}{9} < 0$ donc l'équation $h'(x) = 0$ n'a pas de solutions.
Le signe de $h'(x)$ est donc celui de $a = \frac{1}{3}$ donc pour tout nombre réel x, $h'(x) > 0$.
b) $h'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.
Chloé a donc raison.

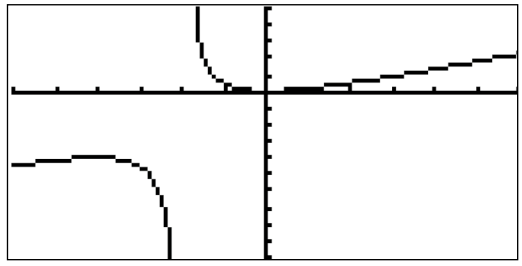
29 **a)** Pour tout $x \neq 3$,
$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-6) - (x+1) \times 2}{(2x-6)^2} = \frac{-8}{(2x-6)^2}$.
b) Pour tout $x \neq 3$, $(2x-6)^2 > 0$ et $-8 < 0$ donc $f'(x) < 0$.
c)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	‖	↘	

30 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq -2$,
$g'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2 \times 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$
b) Pour tout nombre réel $x \neq -2$, $(x+2)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x+4)$.
c) $x(x+4) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -4$.
On obtient le tableau de signes ci-dessous

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	-8	↘	‖	↘	0	↗	

d)



$-6 \leqslant X \leqslant 6$, pas 1 ; $-20 \leqslant Y \leqslant 10$ pas 2

31 **a)** $h'(x) = \frac{2x(x^2+10) - x^2 \times 2x}{(x^2+10)^2}$
$= \frac{20x}{(x^2+10)^2} = 20 \cdot \frac{x}{x^4+20x^2+100}$.
b) Pour tout nombre réel x, $(x^2+10)^2 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $20x$.
$20x = 0$ si et seulement si $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↗	

32 k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x, $k'(x) = 6x^2 - 24{,}12x + 24{,}24$
$k'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = 2{,}02$. On complète le tableau de signes ci-dessous

x	$-\infty$		2		$2{,}02$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	$4{,}24$	↘	$4{,}239\,992$	↗	

Pedro a donc tort.

33 6 est un maximum local et -4 est un minimum local.

34 $g'(x)$ s'annule en -1 en changeant de signe donc g admet en $x = -1$ un extremum local, ici par lecture du tableau il s'agit d'un maximum.

35 **a) (3)** **b) (2)** **c) (2)**

36 **a)** $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

b) Cette affirmation est vraie car $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe.

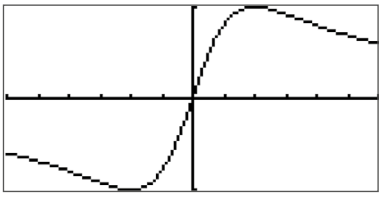
37 $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$.

b) $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 3$ ou $x = -2$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	45	↘	-80	↗	

c) 45 est un maximum local de *f* et -80 est un minimum local de *f*.

38 **a)** *Fenêtre* $-6 \leqslant X \leqslant 6$, pas 1
$-0{,}5 \leqslant Y \leqslant 0{,}5$ pas 0,5



On peut conjecturer que 0,5 est un maximum local et que $-0{,}5$ est un minimum local.

b) *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$$g'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}.$$

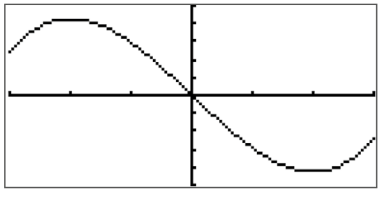
Pour tout nombre réel x, $(x^2+4)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2(4-x^2)$.

$2(4-x^2) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘	$-0{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	

D'après le tableau *g* admet bien pour extremum locaux $-0{,}5$ et 0,5.

39 **a)** *Fenêtre* $-3 \leqslant X \leqslant 3$, pas 1
$-25 \leqslant Y \leqslant 25$, pas 5



On peut conjecturer que *f* admet deux extremums en $x = -2$ et $x = 2$.

b) Pour tout x de $[-2\,;2]$, $f'(x) = 4x^2 - 16$

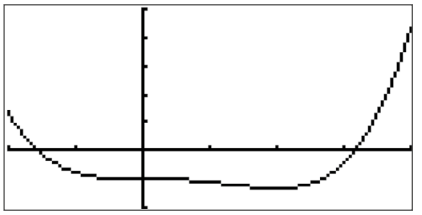
$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$ ou $x = 2$

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↗	$\frac{64}{3}$	↘	$-\frac{64}{3}$	↗	-12

$$f(2) = \frac{4}{3} \times 2^3 - 16 \times 2 = \frac{64}{3}$$

f est impaire donc $f(-2) = -f(2) = \frac{64}{3}$

40 **a)** *Fenêtre* $-1 \leqslant X \leqslant 2$, pas 0,5
$-2 \leqslant Y \leqslant 5$, pas 1



On peut conjecturer que *f* admet un extremum local (un minimum) en $x = 1$ égal à $-\frac{4}{3}$.

b) Pour tout x de $[-1\,;2]$, $f'(x) = 4x^3 - 4x^2$

$f'(x) = 4x^2(x-1)$

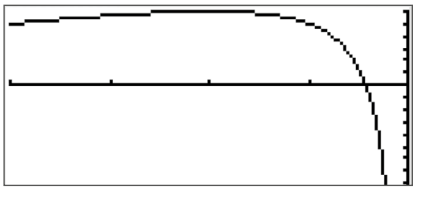
$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$ car $4x^2 \geqslant 0$.

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	↘		↘	$-\frac{4}{3}$	↗	$\frac{13}{3}$

$f(1) = -\frac{4}{3}$ est un minimum local de *f* sur $[-1\,;2]$.

41 **a)** *Fenêtre* $-4 \leqslant X \leqslant 0$, pas 1
$-10 \leqslant Y \leqslant 6$, pas 1



Il semblerait que *f* admet un maximum local en $x = -2$ égal à 6.

b) Pour tout x de $[-4\,;0[$ $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 1$

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Pour tout x de $[-4\,;0[$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4$.
Sur $[-4\,;0[$ $x^2 - 4 = 0$ si et seulement si $x = -2$.

x	-4		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	↗	6	↘	

42 **a)** g est dérivable et $g'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.
$g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = 4$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	17	↘	13	↗	

b) D'après **a)**, g admet un maximum local égal à 17 en $x = 2$ et un minimum local égal à 13 en $x = 4$.
c) Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ g admet 13 pour minimum local, donc pour tout $x \geqslant 2$, $g(x) \geqslant 13$.

43 **a)** $h'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$
$h'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$.

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

b) 0 est le minimum de h sur l'intervalle $[0\,;1]$, donc $h(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;1]$.
c) La position relative, dans un repère, de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$ est donnée par le signe de $x^2 - x^3$ c'est-à-dire de $h(x)$. Or d'après **b)**, pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$, $h(x) \geqslant 0$ donc $x^2 \geqslant x^3$. Ainsi la courbe de la fonction carrée est située au-dessus de celle de la fonction cube sur $[0\,;1]$.

44 **a)** $f'(x) = 3x^2 - 3$
b) Sur $[0\,;+\infty[$ $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

c) D'après **b)**, 0 est le minimum local de f sur $[0\,;+\infty[$.
d) D'après **c)**, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $x^3 - 3x + 2 \geqslant 0$ ce qui donne $x^3 \geqslant 3x - 2$.

45 $-\dfrac{b}{2a} = 2$.
f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et f est croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

46 Elle se trompe, ce n'est pas le signe de $b = -5$ qui permet de donner la nature de l'extremum mais celui de $a = 2$. $a > 0$ donc la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

47 $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{-2} = -2$ et $f(-2) = 5$
donc réponse **(3)**.

48 $f'(x) = 2x - 4$ et $f'(x) = 0$ pour $x = 2$
$f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

49 $f(x) = x^2 + x - 2$ est une fonction polynôme de degré 2 donc sa courbe représentative dans un repère est une parabole.
Iheb a donc raison.

50 A et B ont la même ordonnée et
$\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2 = x_S$
Lison a donc raison.

51 **a)** f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ car $a = \dfrac{1}{3}$ et $a > 0$.
Il est obtenu en $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \times \frac{1}{3}} = -6$ et sa valeur est $f(-6) = -12$
b) $a = -\dfrac{3}{2}$ et $a < 0$ donc l'extremum local est un maximum, il est obtenu pour
$x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{4}{3}$ et sa valeur est $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$.
c) $f(x) = (x-5)^2$ est la forme canonique de $f(x)$. Ici, $a = 1$ et $a > 0$ donc l'extremum local est un minimum, il est obtenu en $x = -5$ et sa valeur est $f(5) = 0$.
d) $f(x) = -3(x+1)^2$ est la forme canonique de $f(x)$. Ici, $a = -3$ et $a < 0$ donc l'extremum local est un maximum, il est obtenu en $x = -1$ et sa valeur est $f(-1) = 0$.

52 **a)** f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -4x - 5$.

$f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = -\frac{5}{4}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{49}{8}$	↘	

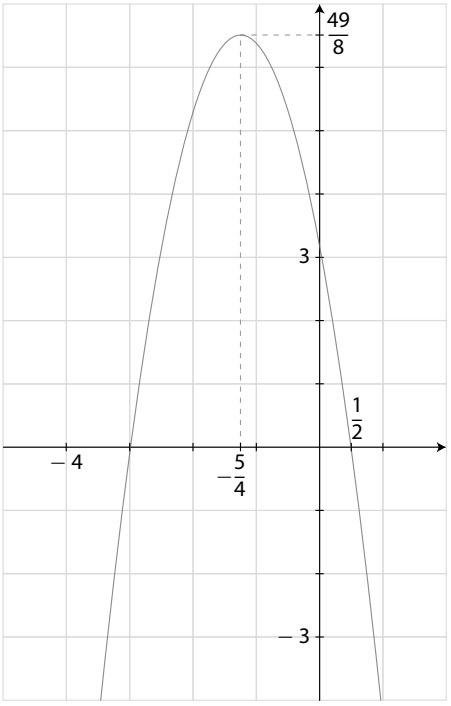
$f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{49}{8}$

b) $f(x) = 0$ si, et seulement si, $-2x^2 - 5x + 3 = 0$.

$\Delta = 49$, $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\left\{-3\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.

c)



53 $\mathscr{C}_1$ est associé à $x^2 + 4x + 4$ ($a = 1$ est positif et $-\frac{b}{2a} = -2$)

$\mathscr{C}_2$ est associé à $\frac{3}{2}x^2 - 12x + 22$ ($a = \frac{3}{2}$ est positif et $-\frac{b}{2a} = 4$)

$\mathscr{C}_3$ est associé à $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ ($a = -\frac{1}{2}$ est négatif et $-\frac{b}{2a} = 2$)

$\mathscr{C}_4$ est associé à $-x^2 - 4x$ ($a = -1$ est négatif et $-\frac{b}{2a} = -2$)

54 **a)** f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -2$.

$a < 0$ donc f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, il est obtenu pour $x = -\frac{b}{2a} = \frac{9}{4}$ et sa valeur est $f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{25}{8}$

b) • Pour tout x de l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{7}{2}\right]$, $f(x) \leqslant \frac{25}{8}$

• $f(1) = 0$ et $f\left(\frac{7}{2}\right) = 0$ et $\frac{1+\frac{7}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{7}{2}\right]$.

Ainsi $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{25}{8}$ et donc $0 \leqslant 8f(x) \leqslant 25$

55 **a)** g est une fonction polynôme du second degré donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $g'(x) = 2x - 7$.

$g'(x) = 0$ si, et seulement, $x = \frac{7}{2}$. On obtient le tableau de variations de g suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

b) Pour tout x de l'intervalle $]3\,;4[$, $g(x) \geqslant -\frac{1}{4}$ donc $\frac{1}{g(x)} \leqslant -4$.

56 **a)** T : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f'(x) = 6x$

$y = 6(x-1) + 4$

$y = 6x - 2$

b) $g(x) = 3x^2 - 6x + 3$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $g'(x) = 6x - 6$.

$g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	0	↗	

c) D'après **b)**, 0 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 6x - 2$

La conjecture d'Anaïs est démontrée.

57 **1.** C **2.** C **3.** B **4.** D

58 **1.** C **2.** B, D **3.** B, D **4.** A, C

59 **1. Faux.** En effet, il y a un minimum en $x = -2$ et un maximum en $x = 2$ donc $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = 0$. L'équation $f'(x) = 0$ admet donc deux solutions.

2. Faux. En effet $f'(5) < 0$ car f est décroissante sur $[2\,;5]$.

3. Vrai. En effet :

• f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;2]$ donc pour tout x de $[0{,}5\,;2]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $f'(1{,}5) \geqslant 0$.

• f est décroissante sur $[2\,;5]$ donc pour tout x de $[2\,;5]$ $f'(x) \leqslant 0$ donc $f'(4) \leqslant 0$.

• $f'(x) = 0$ pour $x = 2$.

Ainsi $f'(1{,}5) > 0$ et $f'(4) < 0$.

4. Vrai. En effet la dérivée f' de f s'annule en -2 et 2 en changeant de signe.

60 **a)** $f'(x) = 3x^2 + 1$

Pour tout nombre réel x, $3x^2 + 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

b) $g'(x) = -6x^2 - 4 = -(6x^2 + 4)$

Pour tout nombre réel x, $6x^2 + 4 > 0$ donc $g'(x) < 0$.

c) $h'(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $x^2 > 0$ donc $h'(x) > 0$.

61 **a)** $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

b) $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = -3$ ou $x = 2$.

c) f' est une fonction polynôme du second degré qui s'annule en -3 et 2.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

62 **a)** $f'(x) = 4x^3 - 12x$

b) $f'(x) = 4x(x^2 - 3) = 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

63 **a)** Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b) Pour tout $x \geqslant 0$, $(x+1)^2 > 0$, $x + 2 > 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.

64 **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x) = 4x^3 + 4x^2$

b) $f'(x) = 4x^2(x+1)$.

$f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ ou $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$4x^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$		$\nearrow$	

65 **a)** $N'(t) = -4t^3 + 64t = 4t(-t^2 + 16)$

$= 4t(4 - t)(4 + t)$

Sur $[0\,; +\infty[$, $N'(t) = 0$ si et seulement si, $t = 0$ ou $t = 4$.

t	0		4		$+\infty$
$4t$	0	$+$		$+$	
$16 - t^2$		$+$	0	$-$	
$N'(t)$	0	$+$	0	$-$	

b) D'après le signe de $N'(t)$ on peut établir les variations de N sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$.

t	0		4		$+\infty$
$N(t)$	100	$\nearrow$	356	$\searrow$	

Le nombre de bactéries a donc augmenté sur les 4 premières heures et diminué au-delà.

S'entraîner

67 **a)** $g(1016) = 4$ et $g(0) = -250$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) < 5$.
Ainsi, l'ordonnée des points d'abscisses supérieures à 1016 est comprise entre 4 et 5 donc les points à coordonnées entières de $\mathscr{C}$ ont une abscisse inférieure ou égale à 1016 dans $[0 ; +\infty[$ donc comprise entre 0 et 1016.

b)
```
def g(x):
    return((5*x-1000)/(x+4))

for n in range(0,1017):
    a=g(n)
    if int(a) == a:
        print("(",n,";",a,")")
```

On obtient 21 points de $\mathscr{C}$ à coordonnées entières indiqués ci-dessous.

```
>>>
( 0 ; -250.0 )
( 1 ; -199.0 )
( 2 ; -165.0 )
( 6 ; -97.0 )
( 8 ; -80.0 )
( 11 ; -63.0 )
( 13 ; -55.0 )
( 16 ; -46.0 )
( 26 ; -29.0 )
( 30 ; -25.0 )
( 47 ; -15.0 )
( 56 ; -12.0 )
( 56 ; -12.0 )
( 64 ; -10.0 )
( 81 ; -7.0 )
( 98 ; -5.0 )
( 166 ; -1.0 )
( 200 ; 0.0 )
( 251 ; 1.0 )
( 336 ; 2.0 )
( 506 ; 3.0 )
( 1016 ; 4.0 )
```

68 **a)** $h(-105) = 1$ et $h(4) = -108$
Pour tout $x < 5$, $h(x) < 2$.
Ainsi, l'ordonnée des points d'abscisses strictement inférieures à 5 et supérieures ou égales à -105 est strictement inférieure à 2 donc les points à coordonnées entières de Γ ont une abscisse comprise entre -105 et 4.

b)
```
def h(x):
    y=((2*x+100)/(x-5))
    return y

for n in range(-105,5):
    a=h(n)
    if int(a) == a:
        print("(",n,";",a,")")
```

On obtient 8 points de Γ à coordonnées entières indiqués ci-dessous :

```
>>>
( -105 ; 1.0 )
( -50 ; -0.0 )
( -17 ; -3.0 )
( -6 ; -8.0 )
( -5 ; -9.0 )
( 0 ; -20.0 )
( 3 ; -53.0 )
( 4 ; -108.0 )
```

70 **a)** On conjecture que l'aire du rectangle est maximale pour une valeur de *a* environ égale à 1,8.

b) On note $x = \text{OA}$ et $\text{S}(x)$ l'aire du rectangle ABCD en fonction de x $(0 \leqslant x \leqslant 3)$.
L'ordonnée de B est $g(x)$ car B appartient à $\mathscr{C}$.
De plus, $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc $\text{S}(x) = 2xg(x) = -\dfrac{8}{9}x^3 + 8x$.
La fonction S est dérivable sur $[0 ; 3]$ et pour tout nombre réel x de cet intervalle, $\text{S}'(x) = -\dfrac{8}{3}x^2 + 8$
Sur $[0 ; 3]$, $-\dfrac{8}{3}x^2 + 8 = 0$ si et seulement si, $x^2 = 3$ c'est-à-dire $x = \sqrt{3}$.
On dresse le tableau de variations de S.

x	0		$\sqrt{3}$		3
$\text{S}'(x)$		+	0	−	
$\text{S}(x)$	0	↗	$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$	↘	0

$$\text{S}\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{8}{9}\left(\sqrt{3}\right)^3 + 8\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

L'aire du rectangle est donc maximale lorsque l'abscisse du point A est $\sqrt{3}$.

71 **a)** On conjecture que l'aire du triangle ABC rectangle en B est maximale lorsque C a pour coordonnées $\left(2 ; \dfrac{64}{9}\right)$.

b) On note x l'abscisse de B $(-6 \leqslant x \leqslant 6)$ et $\text{S}(x)$ l'aire du triangle ABC en fonction de x.
Le point C a pour coordonnées $(x ; h(x))$ car C appartient à $\mathscr{C}$.

$$\text{S}(x) = \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{BC} = \frac{1}{2}(x+6) \times h(x)$$
$$= \frac{1}{2}(x+6)\left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right).$$

$S(x) = \frac{1}{2}AB \times BC = \frac{1}{2}(x+6)\left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right)$

$S'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right) + \frac{1}{2}(x+6)\left(-\frac{4}{9}x\right)$

$S'(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 4.$

$S'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = -6$.

On dresse le tableau de variation de S.

x	-6		2		6
$S'(x)$	0	+	0	−	
$S(x)$	0	↗	$\frac{256}{9}$	↘	0

$S(2) = \frac{1}{2} \times 8\left(-\frac{8}{9} + 8\right) = \frac{256}{9}$. L'aire du triangle ABC est maximale lorsque l'abscisse de B est égale 2.

72 **a)** On pose h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x - 2$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

$h'(x) = 0$ si et seulement si, $x = 1$ ou $x = -1$.

On dresse le tableau de variations de h.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+			
$h(x)$		↗	0	↘	-4	↗	0		

D'après le tableau de variations sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$, $h(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant g(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty ; 2]$.

Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $h(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant g(x)$, donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[2 ; +\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(2 ; 8)$ et $(-1 ; -1)$

b) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$. Pour tout nombre réel x,

$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$f(x) - g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$.

On utilise le tableau de signes de $f(x) - g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$x^2 - 1$		+	0	−		−	0	+	
$f(x) - g(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Sur les intervalles $]-\infty ; -1]$ et $[0 ; 1]$, $f(x) - g(x) \leqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur ces intervalles.

Sur les intervalles $[-1 ; 0]$ et $[1 ; +\infty[$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur ces intervalles.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(-1 ; -1)$, $(0 ; 0)$ et $(1 ; 1)$.

c) On résout l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

$2x^2 + 2x - 1 \leqslant x$ équivaut à $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$.

$2x^2 + x - 1 = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $x = 0{,}5$.

L'inéquation a pour ensemble de solution $\mathscr{S} = [-1 ; 0{,}5]$.

Ainsi sur l'intervalle $[-1 ; 0{,}5]$ $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ et sur les intervalles $]-\infty ; -1]$ et $[0{,}5 ; +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(-1 ; -1)$ et $(0{,}5 ; 0{,}5)$.

73 **a)** Cas $h > 0$.

Pour tous nombres réels x et $x + h$ de I, $x + h > x$ donc $f(x+h) \geqslant f(x)$ car f est croissante sur I.

Ainsi $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$ donc $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

Cas $h < 0$.

Pour tous nombres réels x et $x + h$ de I, $x + h < x$ donc $f(x+h) \leqslant f(x)$ car f est croissante sur I

Ainsi $f(x+h) - f(x) \leqslant 0$ donc $\frac{(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

b) Pour tout x de I, le taux d'accroissement de f en x est pour $h \neq 0$ avec $x + h$ appartient à I, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Ce taux a pour limite $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.

Ainsi $f'(x) \geqslant 0$.

74 Notons x l'une des dimensions du rectangle.

On définit la fonction p sur $]0 ; +\infty[$ telle $p(x)$ représente le périmètre du rectangle.

La deuxième dimension du rectangle est $\frac{100}{x}$

Ainsi $p(x) = 2\left(x + \frac{100}{x}\right)$

La fonction p est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$p'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = \frac{2(x+10)(x-10)}{x^2}.$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, $2(x+10) > 0$ donc le signe de $p'(x)$ est celui de $x - 10$.

$x - 10 = 0$ équivaut à $x = 10$.

x	0		10		$+\infty$
$p'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$p(x)$	‖	↘	40	↗	

D'après le tableau 40 est le minimum de p sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout $x>0$, $p(x)\geqslant 40$. Ceci prouve que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

75 f est une fonction polynôme donc elle est dérivable et pour tout x, $f'(x)=3x^2-a$

Pour que f admette un extremum en 2 il est nécessaire que $f'(2)=0$, ce qui donne $a=12$.

Il faut vérifier que cela est suffisant.

$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)\ =3(x-2)(x+2)$.

f' est une fonction polynôme du second degré qui s'annule en 2 en changeant de signe. La valeur $a=12$ est donc suffisante.

76 **a)** $B'(x)=-3x^2+20x+3\,000$.

Sur $[0\,;50]$, $B'(x)=0$ si et seulement si

$x_0=\dfrac{10+10\sqrt{91}}{3}\approx 35{,}131$

x	0		x_0		50
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

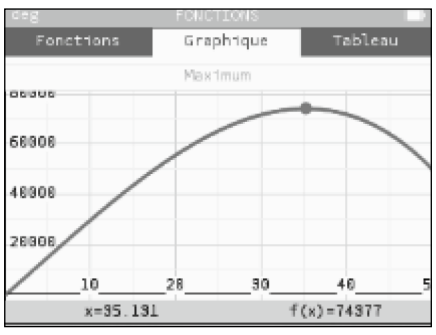
b)

x	0		x_0		50
$B(x)$	0	↗	$B(x_0)$	↘	50 000

$B(x_0)\approx 74\,377$.

c) D'après le tableau de variations de B, le bénéfice est maximal pour 35,131 tonnes pour un bénéfice d'environ 74 377 €.

d)



77 **a)** Pour tout $x>0$, $\dfrac{\sqrt{x}}{2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $12x^2-15x+3$.

$12x^2-15x+3=0$ si et seulement si $x=1$ ou $x=\dfrac{1}{4}$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↗	0,95	↘	0,4	↗	

b) $f(0{,}1)=2{,}524\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}8$

D'après le tableau de variations de f, 0,4 est le minimum de f sur $[0{,}1\,;+\infty[$ donc pour tout $x\geqslant 0{,}1$, $f(x)\geqslant 0{,}4$.

78 **a)** $f(x)=\text{AM}^2+\dfrac{\text{MB}\times\text{CB}}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{(4-x)\times 4}{2}\ =x^2-2x+8$.

b) f est dérivable sur $[0\,;4]$ et pour tout x, $f'(x)=2x-2$.

$f'(x)=0$ si et seulement si $x=1$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	7	↗	16

c) L'aire du carré ABCD vaut, en unité d'aire, 16.

L'aire minimale de la partie colorée est 7, ce qui représente $\dfrac{7}{16}=43{,}75$ %

Myriam a donc raison.

79 **1.** L'effectif de l'entreprise est 40.

$\dfrac{10\times 15+5\times 18+13\times 20+4\times 25+6\times 30+2\times 40}{40}=21{,}5$

Le salaire annuel moyen est 21,5 k€.

2. a)

x	16	18	19,5	21,5	33
$\text{Var}(x)$	72,25	54,25	46,0	42,0	174,25

b) La variance de cette série est 42.

3. a)

$\text{Var}(x)=\dfrac{1}{40}[10(15-x)^2+5(18-x)^2+13(20-x)^2$

$+4(25-x)^2+6(30-x)^2+2(40-x)^2]$

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{40}[10(x^2 - 30x + 225) + 5(x^2 - 36x + 324)^2 + 13(x^2 - 40x + 400) + 4(x^2 - 50x + 625) + 6(x^2 - 60x + 900) + 2(x^2 - 80x + 1600)]$$

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{40}[40x^2 - 1720x + 20170]$$

$$\text{Var}(x) = x^2 - 43x + 504{,}25$$

b) La valeur qui minimise $\text{Var}(x)$ est :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{43}{2} = 21{,}5.$$

Il s'agit de la moyenne.

80 **1. a)** $f(0) = 0$ et $f'(0) = -12$

b) $f(1) = -11$ et $f'(1) = -9$

2. a) $f(0) = 0$ et $f(0) = q$ donc $q = 0$.

$f'(0) = p$ et $f'(0) = -12$ donc $p = -12$.

b) $f(1) = m + n - 12$ et $f(1) = -11$ donc $m + n = 1$

$f'(1) = 3m + 2n - 12$ et $f'(1) = -9$

donc $3m + 2n = 3$

$3m + 2n = 3$ équivaut à $m + 2(m + n) = 3$ c'est-à-dire $m + 2 = 3$. Donc $m = 1$. On en déduit $n = 0$.

Conclusion : $f(x) = x^3 - 12x$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$ ou $x = 2$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	16	↘	-16	↗	

81 **1. a)** Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h'(x) = \frac{2(x^2 + 9) - 2x \times 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{2(-x^2 + 9)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{2(3 + x)(3 - x)}{(x^2 + 9)^2}$$

b) Pour tout nombré réel $x \geqslant 0$, $2(3 + x) > 0$ et $(x^2 + 9)^2 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $3 - x$.

c) $3 - x = 0$ si et seulement si $x = 3$.

On dresse le tableau de variations de h.

x	0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	

2. a) Le maximum de h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est $\frac{1}{3}$ donc pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $h(x) \leqslant \frac{1}{3}$.

b) La fonction h est décroissante sur l'intervalle $[5 ; +\infty[$, donc pour tout $x \geqslant 5$, $h(x) \leqslant h(5)$ c'est-à-dire $h(x) \leqslant \frac{5}{17}$. Or $\frac{5}{17} \leqslant 0{,}3$ et pour tout $x \geqslant 5$, $2x \geqslant 0$ et $x^2 + 9 > 0$ donc $0 \leqslant h(x) \leqslant 0{,}3$.

82 **a)** On complète la ligne par la condition : $f(k) > 2\,000$

On obtient le résultat ci-dessous.

```
>>>
Affirmation fausse
```

Cela signifie qu'il existe un nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 500]$ tel que $f(x) > 2\,000$. L'affirmation de Mélanie est donc fausse.

b) f est le produit de deux fonctions dérivables sur $[1 ; 500]$ donc f est dérivable sur $[1 ; 500]$ et pour tout $x \geqslant 1$, $f'(x) = 1 \times \left(24 - \sqrt{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$f'(x) = 24 - \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

$f'(x) = 24 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

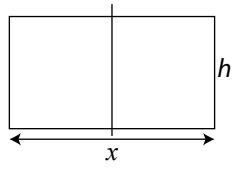
c) $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si, $\sqrt{x} \leqslant 16$, c'est-à-dire $x \leqslant 256$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	1		156		500
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	23	↗	$2\,048$	↘	$500(24 - \sqrt{500})$

D'après le tableau de variations $2\,048$ est un maximum local de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 500]$ donc pour tout nombre réel x de $[1 ; 500]$, $f(x) \leqslant 2\,048$. Ainsi $M = 2\,048$.

83 **a)** Le solide de révolution obtenu par rotation du rectangle autour de son axe de symétrie Δ est un cylindre de diamètre x et de hauteur h.



On sait que $2(x + h) = 60$ donc $h = 30 - x$

Ainsi x appartient à l'intervalle $[0 ; 30]$.

Le volume du cylindre en $\text{V}(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 (30 - x)$

$V(x) = \frac{\pi}{4}x^2(30 - x) = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3)$.

$V'(x) = \frac{\pi}{4}(60x - 3x^2) = \frac{3\pi}{4}x(20 - x)$.

$V'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 20$.

On dresse le tableau de variations de la fonction V.

x	0		20		30
$\mathbf{V'}(x)$	0	+	0	−	
$\mathbf{V}(x)$	0	↗	$1\,000\pi$	↘	0

Les dimensions du rectangle pour obtenir le plus grand volume sont 20 cm et 10 cm.

b) L'aire latérale du cylindre de révolution est :

$$\mathscr{A}(x) = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)(30 - x) = -\pi x^2 + 30\pi x$$

où x est le diamètre du cylindre avec $0 \leqslant x \leqslant 30$.

où $\mathscr{A}'(x) = -2\pi x + 30\pi$

$\mathscr{A}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 15$.

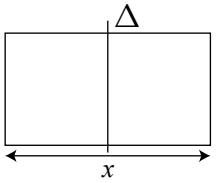
On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		15		30
$\mathscr{A}'(x)$		+	0	−	
$\mathscr{A}(x)$	0	↗	225π	↘	0

L'aire est maximale lorsque $x = 15$.

Les dimensions du rectangle sont 15 cm et 15 cm, il s'agit d'un carré de côté 15 cm.

c) L'aire totale du cylindre de révolution est



$S(x) = 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\pi\frac{x}{2}(30 - x)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 30$

$S(x) = \frac{\pi}{2}x^2 - \pi x^2 + 30\pi x = \left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)x^2 + 30\pi x$.

$S(x) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 30\pi x$

$S'(x) = -\pi x + 30\pi$.

$S'(x) = 0$ si et seulement si $x = 30$.

Il s'agit d'un cylindre aplati.

x	0		30
$\mathbf{S'}(x)$		+	
$\mathbf{S}(x)$	0	↗	450π

84 **a)** $\mathscr{V}(x) = \text{AM} \times \text{AQ} \times \text{AI}$

$\mathscr{V}(x) = x \times x \times (6 - x) = 6x^2 - x^3$ avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.

b) $\mathscr{V}'(x) = 12x - 3x^2 = 3x(4 - x)$

$\mathscr{V}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 4$.

On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{V}$.

x	0		4		6
$\mathscr{V}'(x)$	0	+	0	−	
$\mathscr{V}(x)$	0	↗	32	↘	0

c) La fonction $\mathscr{V}$ admet un maximum local en $x = 4$ donc le volume $\mathscr{V}(x)$ est maximum lorsque le point M est à 4 cm du point A.

85 **a)** p est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $p'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $p'(x)$ s'annule si et seulement si $x = 1$ et le signe de $p'(x)$ est celui de $x^2 - 1$.

On dresse le tableau de variations de la fonction p.

x	0		1		$+\infty$
$\mathbf{p'}(x)$	‖	−	0	+	
$\mathbf{p}(x)$	‖	↘	2	↗	

b) $p'(x)$ s'annule en $x = 1$ en changeant de signe donc p admet, d'après **a)**, un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ égal à $p(1) = 2$.

2. Le périmètre du rectangle OMNA est $2(\text{OM} + \text{OA})$.

On pose $\text{OM} = x$ avec $x > 0$. Le point A a donc pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{x}\right)$.

Ainsi le périmètre du rectangle OMNA vaut $2\left(x + \frac{1}{x}\right)$, c'est-à-dire $2p(x)$.

D'après **1.**, p admet un minimum en $x = 1$ donc les dimensions du rectangle sont $\text{OM} = 1$ et $\text{OA} = 1$ donc OMNA est un carré de côté 1.

86 **a)** La deuxième dimension y d'un rectangle d'aire 2 019 est $y = \frac{2\,019}{x}$ avec $x > 0$.

Ainsi le périmètre du L est $3y + 3x + (y - x)$ c'est-à-dire $4y + 2x$.

Donc $P(x) = 2x + \dfrac{4 \times 2\,019}{x} = 2x + \dfrac{8\,076}{x}$.

b) La fonction P est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $P'(x) = 2 - \dfrac{8\,076}{x^2}$

$P'(x) = \dfrac{2(x^2 - 4\,038)}{x^2}$

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $P'(x) = 0$ si et seulement si $x = \sqrt{4\,038}$.

On dresse le tableau de variation de P.

x	0		$\sqrt{4\,038}$		$+\infty$
$P'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$P(x)$	‖	↘	$4\sqrt{4\,038}$	↗	

$P\left(\sqrt{4\,038}\right) = 2\sqrt{4\,038} + \dfrac{8\,076}{\sqrt{4\,038}}$

$P\left(\sqrt{4\,038}\right) = 4\sqrt{4\,038}$

c) D'après **b)**, le périmètre minimum du polygone en L est obtenu pour $x = \sqrt{4\,038}$ et vaut $4\sqrt{1038}$.

87 f est dérivable sur $[0\,;12]$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) - (x^2 - 2x + 5) \times 1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{x^2 + x - 6}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Pour tout x de l'intervalle $[0\,;12]$, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 + x - 6$.

Sur $[0\,;12]$ $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		2		12
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	1	↗	5

D'après le tableau de variations de f, Sandrine est passée lors de son plongeon à 1 m minimum du fond de la piscine.

88 **a)** Pour tout $x \neq 0$,

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

$f'(2) = 0$ donc la proposition est vraie.

b) $f'(1) = -3$ et $-3 < 0$ donc la proposition est fausse.

c) Pour tout x de l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, $x + 2 > 0$, $x - 2 \geqslant 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

La proposition est vraie.

d) Sur $]0\,;\,+\infty[$ $f'(x)$ s'annule en $x = 2$ en changeant de signe, donc $x_0 = 2$ est un extremum local.

Sur $]0\,;2]$, $f'(x) \leqslant 0$ sur $[2\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc $x_0 = 2$ est un minimum local.

e) $f(1) = 3$ et $3 > -6$ donc la proposition est fausse.

89 La négation de P est : « Il existe un nombre réel x, $f(x) > 2$ ».

La négation de Q est : « Pour tout nombre réel x, $f'(x) < 0$ ».

90 **a)** • La réciproque de l'implication est :

« Si f est croissante sur un intervalle I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$ ».

• La contraposée de l'implication est :

« Si f n'est pas croissante sur un intervalle I, alors il existe au moins un nombre réel x de I, $f'(x) < 0$ ».

b) L'implication est vraie. La réciproque est vraie.

La contraposée est fausse. En effet la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ est constante et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Organiser son raisonnement

91 **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2$.

$f'(x) = 0$. si et seulement si, $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		$\frac{-45+4\sqrt{6}}{9}$	↘	$\frac{-45-4\sqrt{6}}{9}$	↗	

• $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 5$

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 5$

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{6} + \frac{2}{3}\sqrt{6} - 5$

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{-45 + 4\sqrt{6}}{9}$

• $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 5$

$= \frac{2}{9}\sqrt{6} - \frac{2}{3}\sqrt{6} - 5 = \frac{-45 - 4\sqrt{6}}{9}.$

b)

n	0	1	2	3
x_n	2	2,1	2,094 57	2,094 55
$\left\|\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\|$	0,1	0,005 4	0,000 02	0,000 001

$\left|\frac{f(2)}{g(2)}\right| = |-0{,}1| = 0{,}1$ et $0{,}1 \geqslant 10^{-5}$ donc x prend la valeur $2 - (-0{,}1) = 2{,}1$

$\left|\frac{f(2{,}1)}{g(2{,}1)}\right| \approx |0{,}005\,4|$ et $0{,}005\,4 \geqslant 10^{-5}$ donc x prend la valeur $2{,}1 - \frac{f(2{,}1)}{g(2{,}1)} \approx 2{,}094\,57$

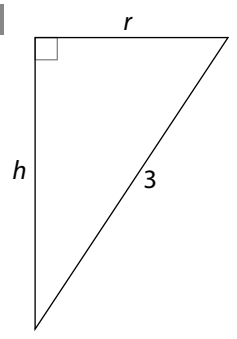
$\left|\frac{f(2{,}094\,57)}{g(2{,}094\,57)}\right| \approx |0{,}000\,02|$ et $0{,}000\,02 \geqslant 10^{-5}$ donc x_0 prend la valeur $2{,}094\,57 - 0{,}000\,02 \approx 2{,}094\,55$

$\left|\frac{f(2{,}094\,55)}{g(2{,}094\,55)}\right| \approx |-0{,}000\,001| = 10^{-6}$ et $10^{-6} < 10^{-5}$ l'algorithme s'arrête.

c)
```
>>> Newton()
2.094551481698199
```

d) $a = 2{,}094\,55$ arrondi au dix-millième.

92



D'après le théorème de Pythagore $r^2 + h^2 = 9$.

Le volume d'un baril de rayon r et de hauteur h est $\pi r^2 h$ c'est-à-dire $\pi(9 - h^2)h$.

Ainsi le volume du baril en fonction de la hauteur h est $V(h) = 9\pi h - \pi h^3$ avec $h \geqslant 0$.

La fonction V est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout h, $V'(h) = 9\pi - 3\pi h^2$.

$V'(h) = 3\pi(3 - h^2) = 3\pi\left(\sqrt{3} - h\right)\left(\sqrt{3} + h\right)$.

Sur $[0\,;+\infty[$, $V'(h) = 0$ si et seulement si $h = \sqrt{3}$.

On dresse le tableau de variations de V.

h	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$	0	↗	$6\pi\sqrt{3}$	↘	

$V\left(\sqrt{3}\right) = \pi\left(9 - \sqrt{3}^2\right)\sqrt{3}$

$V\left(\sqrt{3}\right) = 6\pi\sqrt{3}$

$r^2 = 9 - h^2 = 6$ donc $r = \sqrt{6}$.

Les dimensions du baril de volume maximum sont $r = \sqrt{6}$ pieds et $h = \sqrt{3}$ pieds.

93 **1. a)** $f'(x) = 0{,}75x^4 - 6x^2 + 12$.

b) $f''(x) = 3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4)$

$= 3x(x - 2)(x + 2)$.

2. a) $f''(x) = 0$ si et seulement si, $x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$3x$	−		−		0	+		+	
$x^2 - 4$	+	0	−		−		0	+	
$f''(x)$	−	0	+	0	−		0	+	

On dresse le tableau de variations de f'.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	↘		0	↗	12	↘	0	↗	

D'après **2. a)**, pour tout nombre réel x, $f'(x) \geqslant 0$.

c) Pour tout x, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

94 Dans le repère orthonormé, on pose x l'abscisse de M avec $x \geqslant 0$. Ainsi $M(x\,;\sqrt{x})$.

$AM^2 = (x - 1)^2 + \left(\sqrt{x}\right)^2 = x^2 - x + 1$.

Déterminer la position du point M de $\mathscr{C}$ le plus proche de A c'est déterminer la position du point M de $\mathscr{C}$ telle que la longueur AM est minimum, ce qui est équivalent à AM^2 minimum.

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2-x+1$.

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x)=2x-1$.

$f'(x)=0$ si et seulement si $x=\dfrac{1}{2}$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{4}$

Le point de $\mathscr{C}$ le plus proche de A est donc $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

95 On note x et y les dimensions d'un box.

Les douze box nécessitent $16x+15y$ de clôture donc $16x+15y=2$.

L'aire des douze box est $12xy$, c'est-à-dire $12x\left(\dfrac{2-16x}{15}\right)=\dfrac{3}{5}x(2-16x)$ avec $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{8}$.

$\mathscr{A}$ est la fonction définie sur $\left[0\,;\dfrac{1}{8}\right]$ par $\mathscr{A}(x)=\dfrac{4}{5}(2x-16x^2)$

$\mathscr{A}'(x)=\dfrac{4}{5}(2-32x)$.

$\mathscr{A}'(x)=0$ si et seulement si, $x=\dfrac{1}{16}$.

On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	↗	$\frac{1}{20}$	↘	0

$y_{\max}=\dfrac{2}{15}-\dfrac{16}{15}x_{\max}=\dfrac{2}{15}-\dfrac{16}{15}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{15}$

Les dimensions d'un box qui donnent le maximum d'espace aux animaux sont $\dfrac{1}{16}$ km c'est-à-dire 62,5 m sur $\dfrac{1}{15}$ km c'est-à-dire 66,7 m.

96 On note x l'abscisse du point M de $\mathscr{P}(0 \leqslant x \leqslant 0{,}5)$.

$\mathscr{P}$ a pour sommet le point $\mathrm{S}(0\,;-0{,}25)$ donc la fonction f dont la courbe représentative est $\mathscr{P}$ est définie sur $[0\,;0{,}5]$ par $f(x)=ax^2-0{,}25$.

Or $f\ (0{,}2)=0$ donc $a=6{,}25$.

D'où $f(x)=6{,}25x^2-0{,}25$.

L'ordonnée de M est donc $f(x)$.

L'aire du rectangle bleu est :

$\mathscr{A}(x)=x\left|f(x)\right|=x(0{,}25-6{,}25x^2)=-6{,}25x^3+0{,}25x$

avec $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

$\mathscr{A}'(x)=-18{,}75x^2+0{,}25$.

Sur $[0\,;0{,}2]$, $\mathscr{A}'(x)=0$ si et seulement si $x=\sqrt{\dfrac{0{,}25}{18{,}75}}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$

On dresse le tableau de variations de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{15}$		0,2
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{90}$	↘	0

$\mathscr{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)=-6{,}25\left(\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)^3+0{,}25\dfrac{\sqrt{3}}{15}$

$\mathscr{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{90}$

L'abscisse du point M pour laquelle l'aire du rectangle bleu est maximale est $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$.

97 La durée du trajet de 1000 km à la vitesse moyenne v est $t=\dfrac{1000}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc de :

$$10{,}20\times\frac{1000}{v}=\frac{10\,200}{v}.$$

La consommation en litres pour 1000 km sera de $100(v)=\dfrac{6\,000}{v}+2v$.

Le litre de carburant coûte 1,5 € donc le coût du carburant sera de $1{,}5\left(\dfrac{6\,000}{v}+2v\right)=\dfrac{9\,000}{v}+3v$.

Le prix de revient est alors :

$\mathrm{P}(v)=\dfrac{10\,200}{v}+\dfrac{9\,000}{v}+3v\ =\dfrac{19\,200}{v}+3v$.

$\mathrm{P}'(v)=-\dfrac{19\,200}{v^2}+3$

$$=\frac{3(-6\,400+v^2)}{v^2}=\frac{3(80+v)(80-v)}{v^2}.$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $\mathrm{P}'(v)=0$ si et seulement si $v=80$.

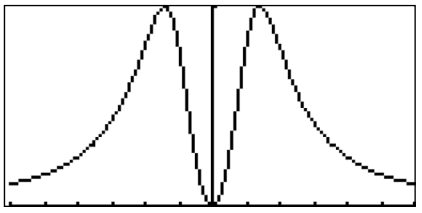
On dresse le tableau de variations de la fonction P.

v	0		80		$+\infty$
$\mathbf{P'}(v)$		$-$	0	$+$	
$\mathbf{P}(v)$		↘	480	↗	

Pour minimiser les coûts, la vitesse moyenne doit être de $80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et le prix de revient est alors 480 €.

La durée du trajet, en h, est alors $\dfrac{1000}{80} = 12{,}5$ soit 12 h 30 mn.

98 **a)** Dans la fenêtre $-6 \leqslant X \leqslant 6$ (pas $= 1$) et $0 \leqslant Y \leqslant 1$ (pas $= 1$). On peut conjecturer que $m = 0$ et $M = 1$.



b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{8x(4+x^4) - 4x^2 \times 4x^3}{(4+x^4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x(4-x^4)}{(4+x^4)^2} = \frac{8x(2-x^2)(2+x^2)}{(4+x^4)^2}$$

$$= \frac{8x(2+x^2)\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)}{(4+x^4)^2}$$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $8x(2-x^2)$ car $(4+x^4)^2 > 0$ et $2 + x^2 > 0$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$8x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$2-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
$\mathbf{P}(x)$		↗	1	↘	0	↗	1	↘	

D'après le tableau de variations de f, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant 1$. De plus $4x^2 \geqslant 0$ et $4 + x^4 > 0$ donc $f(x) \geqslant 0$.

Donc pour tout x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Ainsi $M = 1$ et $m = 0$.

99 On étudie les variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout x,

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $x + 2 \geqslant 0$, $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

f conserve l'ordre donc $1{,}089 \geqslant 1{,}088$ implique $f(1{,}089) \geqslant f(1{,}088)$ c'est-à-dire $\dfrac{1{,}089^2}{2{,}089} \geqslant \dfrac{1{,}088^2}{2{,}088}$.

100 **a)** φ est dérivable sur $[-1\,;1]$ et pour tout x, $\varphi'(x) = f'(x) - f'(-x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

b) Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$, $\varphi'(x) = 0$ donc φ est une fonction constante sur $[-1\,;1]$

Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$,

$\varphi(x) = \varphi(0) = f(0) + f(-0) = 0 + 0 = 0$.

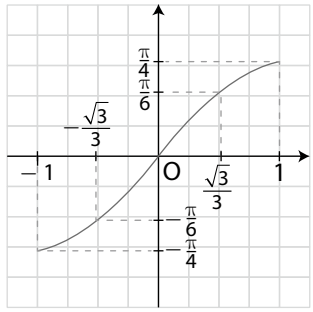
Ainsi pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$, $\varphi(x) = 0$.

c) Pour tout nombre réel x de $[-1\,;1]$:

$f(x) + f(-x) = 0$ donc $f(-x) = -f(x)$.

f est donc impaire.

d)



101 To find latitude and longitude of the southernmost point at which the full eclipse could viewed, we will find the extremum values of the function f.

$f'(x) = 0{,}025x - 1{,}157$.

$f'(x) = 0$ if and only if $x = 46{,}28$.

x	15		46,28		90
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	8,321 5	↘	− 3,908 98	↗	19,984

So the number of degrees of longitude east of the prime meridian is 46°16′48″ and the latitude is 3°54′32″ South.

102 Pour tout nombre réel a, $f'(a) = -2a + 1$.

$f'(a)$ s'annule en $a = \dfrac{1}{2}$ en changeant de signe donc f admet en $\dfrac{1}{2}$ un extremum local.

Sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $f'(a) \geqslant 0$ et sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$, $f'(a) \leqslant 0$ donc il s'agit d'un maximum local égal à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 6$, soit 6,25.

103 **a)** D'après le théorème de Pythagore $h^2 + r^2 = 3$.

Le volume du cône est $\dfrac{1}{3}\pi r^2 \times h = \dfrac{1}{3}\pi(3 - h^2)h$

La fonction V définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi(3h - h^3)$ est dérivable et pour tout h,

$V'(h) = \dfrac{1}{3}\pi(3 - 3h^2) = \pi(1 - h^2)$

$V'(h) = \pi(1 - h)(1 + h)$.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, $V'(h) = 0$ si et seulement si $h = 1$.

On dresse le tableau de variation de la fonction V.

h	0		1		$+\infty$
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$	0	↗	$\frac{2\pi}{3}$	↘	

Le volume du cône est maximal lorsque $h = 1$ m et $r = \sqrt{3 - 1^2} = \sqrt{2}$ m.

b) Ce volume maximal est $\dfrac{2\pi}{3}$ m^3.

104 f est dérivable sur $[0{,}5\,;\,3{,}4]$ et pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ et $x = 3$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	0,5		1		3		3,4
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	5,125	↗	6	↘	2	↗	2,544

Par lecture du tableau $m = 1$, $c = 2$, $d = 3$ et $u = 6$.

105 Le temps t_1 mis pour l'aller est $t_1 = \dfrac{d}{20}$

Le temps t_2 mis pour le retour est $t_2 = \dfrac{d}{x}$

La vitesse moyenne aller-retour est :

$$\frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\dfrac{d}{20} + \dfrac{d}{x}} = \frac{40x}{x + 20}.$$

La moyenne arithmétique des deux vitesses est $\dfrac{20 + x}{2}$.

On note $f(x)$ la différence des deux vitesses :

$$f(x) = \frac{20 + x}{2} - \frac{40x}{x + 20}.$$

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{800}{(x + 20)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x + 20)^2 - 1600}{2(x + 20)^2} = \frac{(x + 60)(x - 20)}{2(x + 20)^2}.$$

Pour tout nombre réel $x > 0$, $2(x + 20)^2 > 0$ et $x + 60 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 20$.

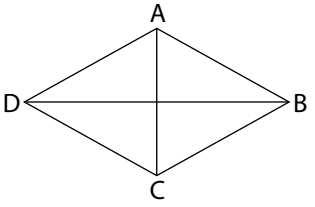
Sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 20$.

On dresse le tableau de variations de f.

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	10	↘	0	↗	

Le minimum de f est 0 donc on peut affirmer que la vitesse arithmétique est supérieure ou égale à la vitesse moyenne.

106



ABCD est un losange de périmètre p tel que $BD = L$ et $AC = \ell$.

L'aire du losange est $\dfrac{L\ell}{2}$.

D'après le théorème de Pythagore, $\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{p}{4}\right)^2$ donc $L^2 + \ell^2 = \dfrac{p^2}{4}$.

L'aire est maximum lorsque $\dfrac{L\ell}{2}$ est maximum, ce qui équivaut à $\dfrac{L^2\ell^2}{4}$ maximum (la fonction carré est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$).

$$L^2\ell^2 = L^2\left(\frac{p^2}{4} - L^2\right) = \frac{p^2}{4}L^2 - L^4.$$

On note f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(L) = \dfrac{p^2}{4}L^2 - L^4$.

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout nombre réel L on a :

$f'(\mathrm{L}) = \dfrac{p^2}{2}\mathrm{L} - 4\mathrm{L}^3 = \mathrm{L}\left(\dfrac{p^2}{2} - 4\mathrm{L}^2\right)$.

$f'(\mathrm{L}) = 0$ si et seulement si, $\mathrm{L} = 0$ ou $\mathrm{L} = \dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.

L	0		$\frac{p}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(\mathrm{L})$		+	0	−	
$f(\mathrm{L})$	0	↗	$\frac{p^4}{64}$	↘	

La fonction f admet un maximum sur $[0\,;+\infty[$ en $\mathrm{L} = \dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.

$\ell^2 = \dfrac{p^2}{4} - \mathrm{L}^2 = \dfrac{p^2}{4} - \dfrac{p^2}{8} = \dfrac{p^2}{8}$ donc $\ell = \dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.

Ainsi, parmi les losanges de périmètre p, il en existe un dont l'aire est maximum : c'est le carré (les diagonales du losange sont de même longueur).

107 **a)** $f(30) = \dfrac{44}{3} \approx 14{,}7$

$f(50) = 4$

À $30\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ la consommation est 14,7 litres pour 100 km et à $50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ la consommation est de 4 L pour 100 km.

b) f est dérivable sur $[30\,;130]$ et pour tout x,

$f'(x) = \dfrac{(16x - 800)x^2 - (8x^2 - 800x + 30\,000) \times 2x}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{x(16x^2 - 800x - 16x^2 + 1600x - 60\,000)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{800x - 60\,000}{x^3}$

c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[30\,;130]$, $x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $800x - 60\,000$.

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{60\,000}{800} = 75$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	30		75		130
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$\frac{44}{3}$	↘	$\frac{8}{3}$	↗	$\frac{612}{169}$

d) La consommation est minimum pour la vitesse de $75\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Cette consommation vaut, arrondie au centième, 2,67 litres pour 100 km.

e) La valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme est 51.

En effet, $f(50) = 4$ et sur l'intervalle $[30\,;75]$ la fonction f est décroissante par conséquent l'algorithme s'arrête juste après 50 donc à 51.

Cela signifie que la consommation est strictement inférieure à 4 L aux 100 km lorsque la vitesse sera supérieure à $51\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Exploiter ses compétences

108 D'après le Doc. 2, $f(0) = 2{,}2$ et $f'(0) = 2$.

D'après le Doc. 3, $f(0) = c$ et $f'(0) = b$

On déduit que $c = 2{,}2$ et $b = 2$.

Ainsi $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 2{,}2$.

D'après le Doc. 3, le panier est à 3 m du joueur et se situe à 3,7 m du sol.

$f(3) = -0{,}5 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2{,}2 = 3{,}7$.

Le joueur a des chances de marquer son panier.

109 On étudie la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}) - \mathrm{P}$

$g(\mathrm{P}) = -0{,}025\mathrm{P}^2 + 3\mathrm{P}$

g est dérivable et $g'(\mathrm{P}) = -0{,}05\mathrm{P} + 3$

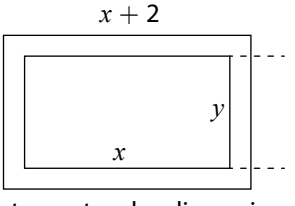
$g'(\mathrm{P}) = 0$ si et seulement si $\mathrm{P} = 60$

On dresse le tableau de variations de g.

P	0		60		$+\infty$
$g'(\mathrm{P})$		+	0	−	
$g(\mathrm{P})$	0	↗	90	↘	

Le RMD est de 90 000 lièvres.

110



On note x et y les dimensions de la piscine.

On a donc $xy = 16$ donc $y = \dfrac{16}{x}$.

D'après le Doc. 1, la surface de la margelle est :

$2 \times 1 \times (x+2) + y \times 1 \times 2 = 2x + 4 + 2 \times \dfrac{16}{x}$

c'est-à-dire $2x + 4 + \dfrac{32}{x}$.

On note f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{32}{x}$.

$f'(x) = 2 - \dfrac{32}{x^2} = \dfrac{2(x^2-16)}{x^2} = \dfrac{2(x-4)(x+4)}{x^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 4$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 4$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f.

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	20	↗	

Louis utilisera donc $\dfrac{20}{0{,}25} = 80$ caillebotis.

2 bidons de 1 L coûtent 29,80 € pour un rendement de 24 m^2.

1 bidon de 2,5 L coûte 29,90 € pour un rendement de 30 m^2.

1 bidon de 5 L coûte 47,90 € pour un rendement de 40 m^2.

Louis doit donc prendre 2 bidons de 1 L.

111 D'après les Doc. 1 et 2, le bénéfice quotidien est :

$B(x) = R(x) - 2 = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x - 2$

D'après le Doc. 3., $B'(x) = -2(x-1)^2(2x-5)$.

Pour tout x compris entre 0 et 10, $(x-1)^2 \geqslant 0$ donc le signe de $B'(x)$ est celui de $-2(2x-5)$.

$B'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = \dfrac{5}{2}$.

On dresse le tableau de variations de R.

x	0		1		$\frac{5}{2}$		10
$R'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$R(x)$	-2	↗		↗	2,687 5	↘	$-5\,102$

La fonction R admet un maximum en 2,5 égal à 2,687 5.

Le bénéfice quotidien est donc maximum lorsque l'entreprise produit et vend 250 litres de parfum et il s'élève à 2 687,5 €.