4 Dérivation

Découvrir

1 Vitesse moyenne et vitesse instantanée

1 **a)** La vitesse moyenne (en $m \cdot s^{-1}$) de la bille entre les instants :

• $t = 1$ et $t = 1{,}2$ est $\dfrac{d(1{,}2) - d(1)}{0{,}2} = 10{,}78$

• $t = 0{,}9$ et $t = 1$ est $\dfrac{d(1) - d(0{,}9)}{0{,}1} = 9{,}31$

b) Entre les instants $t = 1$ et $t = 1 + h$ (avec $1 + h \geqslant 0$ et $h \neq 0$), la distance parcourue par la bille est :

• si $h > 0$, $d(1 + h) - d(1)$

• si $h < 0$, $d(1) - d(1 + h)$.

La vitesse moyenne est :

• si $h > 0$, $\dfrac{d(1 + h) - d(1)}{h}$

• si $h < 0$, $\dfrac{d(1) - d(1 + h)}{-h}$

c'est-à-dire dans les deux situations :

$$\frac{d(1 + h) - d(1)}{h}.$$

c) $\dfrac{d(1 + h) - d(1)}{h} = \dfrac{4{,}9(1 + h)^2 - 4{,}9}{h} = \dfrac{4{,}9h(2 + h)}{h}$

$\dfrac{d(1 + h) - d(1)}{h} = 4{,}9(2 + h)$.

2 Lorsqu'on donne à h des valeurs de plus en plus proches de 0, $\dfrac{d(1 + h) - d(1)}{h}$ se rapproche de 9,8.

2 Un coût marginal

1 **a)** Le coût de production de q litres est $C(q)$, celui de $q + 1$ litres est $C(q + 1)$, donc $C_m(q) = C(q + 1) - C(q)$.

b) $C_m(q)$ est le taux de variation de la fonction C entre q et $q + 1$.

c) $C_m(50) = \dfrac{3}{1000} \times 50^2 - \dfrac{97}{1000} \times 50 + \dfrac{951}{1000}$

$C_m(50) = 3{,}601$.

Lorsque l'entreprise produit 50 litres d'huile d'olive, le coût induit par la production d'un litre supplémentaire est environ 3,60 €.

2 Géométriquement, la distance NP est égale au coût marginal $C_m(50)$.

Acquérir des automatismes

3 **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{2(2 + h)^2 + 3 - (2 \times 2^2 + 3)}{h}$

$\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \dfrac{2(4h + h^2)}{h} = \dfrac{2h(4 + h)}{h}$

$\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = 2(4 + h)$.

b) $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f, A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 2 et $2 + h$ avec $h \neq 0$, alors $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ est la pente de la sécante (AM).

c) Le taux $2(4 + h)$ a pour limite 8 lorsque h tend vers 0 donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

4 **a)** La droite T passe par les points $A(-1;1)$ et $B(1;0)$ donc sa pente est $\frac{0-1}{1-(-1)}=-\frac{1}{2}$.

b) Le nombre dérivé de f en -1 est la pente de la tangente T, ainsi $f'(-1)=-\frac{1}{2}$.

7 g est dérivable en tout nombre réel $x>0$ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(4)=\frac{1}{4}$.

D'autre part $g(4)=2$. Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est :

$y=g'(4)(x-4)+g(4)$, $y=\frac{1}{4}(x-4)+2$,

soit $y=\frac{1}{4}x+1$.

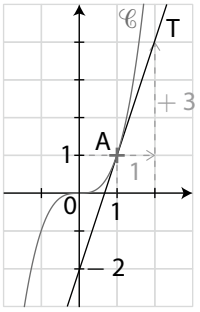
8 La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=3x^2$.

$g(1)=1$ et $g'(1)=3$ donc on trace la droite T qui passe par $A(1;1)$ et de pente 3.

On peut aussi déterminer une équation de T :

$y=3(x-1)+1$, soit $y=3x-2$ et on choisit deux points de cette droite $A(1;1)$ et par exemple $B(0;-2)$.



11 **a)** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $g'(x)=-12x^2+2x$.

b) Pour tout nombre réel x, $f(x)=\frac{1}{5}(2x^2-x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x)=\frac{1}{5}(4x-1)$.

c) h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$h'(x)=2(x^2-2x+2)+(2x-5)(2x-2)$

$h'(x)=2x^2-4x+4+4x^2-14x+10$

$h'(x)=6x^2-18x+14$.

12 g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\infty;4[$ et $]4;+\infty[$ donc g est dérivable sur chacun de ces intervalles.

Pour tout nombre réel $x\neq 4$,

$g'(x)=\frac{-2(x-4)-(-2x+5)}{(x-4)^2}$

$g'(x)=\frac{3}{(x-4)^2}$.

13 $3h-11$ a pour limite -11 lorsque h tend vers 0 donc $f'(1)=-11$.

14 On effectue le calcul du taux de variation de la fonction g entre 3 et $3+h$.

15 Louise a tort. La pente de la tangente à la courbe représentative de f au point A est $f'(-1)=-2$.

16 On lit graphiquement que la pente de T est égale à 1 donc $f'(4)=1$.

17 La pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $\frac{1}{2}$ donc $g'(0)=\frac{1}{2}$.

18 Une équation de T est :

$y=-3(x-1)+2$, soit $y=-3x+5$.

La réponse correcte est la réponse **(2)**.

19 **a)** Pour tout nombre réel $h\neq 0$,

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}$

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h$.

b) La limite de $4+h$ lorsque h tend vers 0 est 4 donc $f'(2)=4$.

20 **a)** Pour tout nombre réel $h\neq 0$,

$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{-(1+h)^2+3(1+h)-1-(1)}{h}$

$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{-h^2+h}{h}=\frac{h(-h+1)}{h}=-h+1$.

b) La limite de $-h+1$ lorsque h tend vers 0 est 1 donc g est dérivable en 1 et $g'(1)=1$.

21 **a)** Pour tout nombre réel h avec $h>-1$ et $h\neq 0$,

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\frac{4}{1+h}-4}{h}=\frac{4-4(1+h)}{h(1+h)}$

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{-4h}{h(1+h)}=\frac{-4}{1+h}$.

b) La limite de $\frac{-4}{1+h}$ lorsque h tend vers 0 est -4 donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-4$.

22 **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(4+h)-g(4)}{h} = \frac{(4+h)^2+7-23}{h} = \frac{8h+h^2}{h}$$

$$\frac{g(4+h)-g(4)}{h} = \frac{h(8+h)}{h} = 8+h.$$

b) La limite de $8+h$ lorsque h tend vers 0 est 8 donc $g'(4) = 8$.

23 **a)** Pour tout nombre réel h avec $h > -1$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\dfrac{-2}{h+1}-(-2)}{h} = \frac{-2+2(h+1)}{h(h+1)}$$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{2h}{h(h+1)} = \frac{2}{h+1}.$$

b) La limite de $\dfrac{2}{h+1}$ lorsque h tend vers 0 est 2 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

24 **a)** La pente de la sécante (AM) est :

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h} = \frac{h^2-2h}{h},$$

soit $\dfrac{h(h-2)}{h} = h-2$.

b) La limite de $h-2$ lorsque h tend vers 0 est -2 donc la pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est -2.

c) Et ainsi $f'(-1) = -2$.

25 **a)** La vitesse moyenne de la bille entre les instants 1,9 et 2 est $4{,}9 \times (-0{,}1) + 19{,}6 = 19{,}11\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Entre les instants 2 et 2,1, elle est égale à :

$$4{,}9 \times 0{,}1 + 19{,}6 = 20{,}09\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) La limite de $4{,}9h + 19{,}6$ lorsque h tend vers 0 est 19,6, donc la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$ est $19{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

26 **a)** $\mathrm{C}(q+1) = \dfrac{1}{500}(q+1)^3 + 100$

$$\mathrm{C}(q+1) = \frac{1}{500}(q^3+3q^2+3q+1) + 100$$

$$\mathrm{C}(q+1) = \frac{1}{500}q^3 + \frac{3}{500}q^2 + \frac{3}{500}q + \frac{50\,001}{500}$$

b) $\mathrm{C}(q+1) - \mathrm{C}(q) = \dfrac{3}{500}q^2 + \dfrac{3}{500}q + \dfrac{1}{500}$

27 On lit sur le graphique :

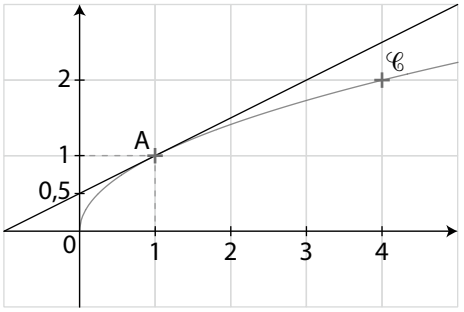
a) $h'(0) = 0$ **b)** $h'(1) = -2$

28 On lit sur le graphique :

a) $f(0) = 2$ $f(2) = 0$ $f(4{,}5) = 2$

b) $f'(0) = -4$ $f'(2) = \dfrac{1}{2}$ $f'(4{,}5) = 0$

29 **a)**

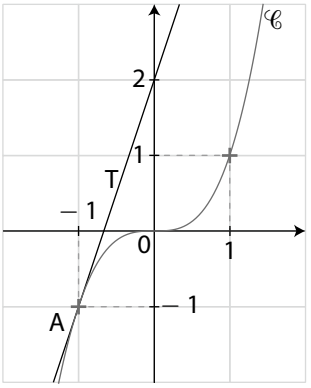


b) On lit $f'(1) = 0{,}5$.

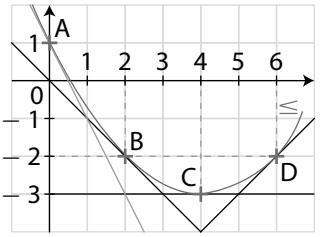
c) La pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est 0,5.

30 **a)** $f'(-1) = 3$. La pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est 3.

b)



31 **a) b)** et **c)**



32 Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A est :

a) $y = x$

b) $y = 3x$

c) $y = 2$

d) $y = -5x + 1$

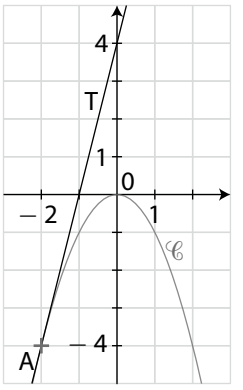
33 **a)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est :

$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$,

soit $y = 4(x+2) - 4$,

$y = 4x + 4$.

b) Voir ci-contre.

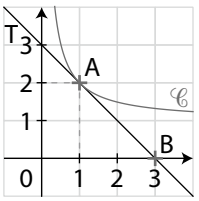


34 **a)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$y = g'(1)(x-1) + g(1)$,

soit $y = -1(x-1) + 2$, $y = -x + 3$.

b)



T passe par A(1 ; 2) et B(3 ; 0).

35 Pour tout nombre réel x,

a) $f'(x) = 0$ **b)** $g'(x) = 0$ **c)** $h'(x) = 1$

36 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2$.

L'expression est **(3)**.

37 Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

a) $g'(1) = -1$ **b)** $g'(2) = -\dfrac{1}{4}$

c) $g'(-2) = -\dfrac{1}{4}$ **d)** $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4$

38 Pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

a) L'égalité est vraie.

b) L'égalité est fausse.

c) L'égalité est vraie.

39 **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2$

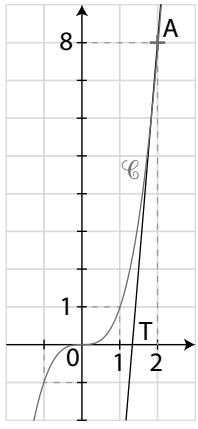
donc $f'(2) = 12$.

b) Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = 12(x-2) + 8$,

$y = 12x - 16$.

c)



40 Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

donc $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 est

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = -\dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{2}$,

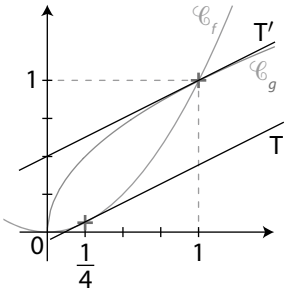
$y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.

Il s'agit bien de l'équation donnée par le logiciel.

41 **1. a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x$

donc $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b)



2. a) Pour tout nombre réel $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $g'(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Voir graphique ci-dessus.

3. a) Les droites T et T′ semblent parallèles.

b) Les droites T et T′ ont la même pente car $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = g'(1) = \dfrac{1}{2}$ donc elles sont parallèles.

42 Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe :

$\mathscr{C}_f$: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, $y = 2(x-1) + 1$,

$y = 2x - 1$. Il s'agit de T_3.

$\mathscr{C}_g$: $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, $y = -1(x-1) + 1$,

$y = -x + 2$. Il s'agit de T_1.

$\mathscr{C}_h$: $y = h'(1)(x-1) + h(1)$, $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$,

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Il s'agit de T_2.

43 **a)** Pour tout t de $\mathbb{R}^*$, $f(t) = t^{-3}$ donc $n = -3$.

b) Pour tout t de $\mathbb{R}^*$, $f'(t) = -3t^{-4}$.

c) Donc, pour tout t de $\mathbb{R}^*$, $f'(t) = \dfrac{-3}{t^4}$.

44 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

L'expression est donc **(2)**.

45 Pour tout nombre réel x,

a) $f'(x) = 12x^2$

b) $g'(x) = x^2$

c) $h'(x) = -21x^2$

46 Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(x) > 0$.
Tom a raison.

47 Pour tout nombre réel x,
a) $f'(x) = 2x + 3$
b) $g'(x) = 6x^2 - 6x + 1$
c) $h'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$

48 **a)** Pour tout nombre réel x,
$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.
b) Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f'(x) = 2x(3x - 1) + 3(x^2 + 5)$
$f'(x) = 9x^2 - 2x + 15$.

49 **a)** Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 1(x^2 + x + 2) + (x + 1)(2x + 1)$
$f'(x) = x^2 + x + 2 + 2x^2 + 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$
b) Pour tout nombre réel t,
$g'(t) = (3t^2 - 1)(2t - 1) + 2(t^3 - t)$
$g'(t) = 8t^2 - 3t^2 - 4t + 1$

50 Pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

51 Pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$,
$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = 1$.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = 1(x - 1)$, $y = x - 1$.
Cette tangente est bien la droite d.

52 **a)** Pour tout nombre réel x, $u'(x) = 5$.
b) Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 2 \times 5 \times (5x + 7) = 10(5x + 7)$

53 Pour tout nombre réel x,
a) $f'(x) = 2 \times (-3)(-3x + 5) = -6(-3x + 5)$
b) $g'(x) = 2(2x + 4)\left(x^2 + 4x - \dfrac{1}{2}\right)$

54 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq \dfrac{1}{5}$, $v'(x) = 5$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq \dfrac{1}{5}$,
$g'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v(x)^2} = -\dfrac{5}{(5x-1)^2}$

55 Pour tout nombre réel t,
$f'(t) = -\dfrac{2t + 1}{(t^2 + t + 1)^2}$

56 Pour tout nombre réel $x \neq \dfrac{1}{2}$,
$f(x) = \dfrac{1}{3}(2x - 1) + 3 \times \dfrac{1}{2x - 1}$, donc
$f'(x) = \dfrac{1}{3} \times 2 + 3 \times \left(-\dfrac{2}{(2x-1)^2}\right)$
$f'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{6}{(2x-1)^2}$

57 Pour tout nombre réel $x \neq \dfrac{1}{4}$,
$u'(x) = 7$ et $v'(x) = 4$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq \dfrac{1}{4}$,
$g'(x) = \dfrac{7(4x - 1) - 4(7x + 5)}{(4x-1)^2}$
$g'(x) = \dfrac{-27}{(4x-1)^2}$

58 Pour tout nombre réel $x \neq 1$,
$f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x - 1) - (x^2 + 3x)}{(x-1)^2}$
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

59 **a)** g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(X) = \sqrt{X}$.
g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout nombre réel $X > 0$, $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.
b) f est dérivable en tout nombre réel x tel que $3x + 4 > 0$. Ainsi f est dérivable sur $\left]-\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$ et pour tout nombre réel x tel que $x > -\dfrac{4}{3}$,
$f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x+4}}$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$.

60 **1.** B **2.** C **3.** A

61 **1.** A, C, D **2.** B, D **3.** A, B, D **4.** B

62 **1. L'affirmation est vraie.**
En effet, pour tout nombre réel $x \neq 0$,
$f'(x) = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$.

2. L'affirmation est vraie.
En effet, pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.
Donc $f'(-2) = 0$ et $f'(1) = 0$.
3. L'affirmation est fausse.
En effet, pour tout nombre réel $x > \frac{1}{4}$,
$g'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$.

63 h est un nombre réel, $h \neq 0$.
a) $f(1+h) = 3(1+h)^2 = 3(1+2h+h^2)$
$f(1+h) = 3 + 6h + 3h^2$.
b) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3+6h+3h^2-3}{h}$
$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3h(h+2)}{h} = 3(h+2)$.
c) $3(h+2)$ a pour limite 6 lorsque h tend vers 0 donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 6$.

64 Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.
La pente de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est -4 et T est donc parallèle à d.

65 **a)** Pour tout nombre réel x, $g'(x) = 3x^2$ donc $g'(1) = 3$.
b) Une équation de T est :
$y = g'(1)(x-1) + g(1)$, soit $y = 3(x-1) + 2$,
$y = 3x - 1$.

66 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 5$,
$u(x) = -2x + 3$ et $v(x) = x - 5$.
b) Pour tout nombre réel $x \neq 5$,
$u'(x) = -2$ et $v'(x) = 1$.
c) Pour tout nombre réel $x \neq 5$,
$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$f'(x) = \frac{-2(x-5) - (-2x+3)}{(x-5)^2}$
$f'(x) = \frac{7}{(x-5)^2}$

S'entraîner

68 **1. a)** Pour $0 < h \leqslant 1$, la pente de la sécante (OM) est :
$c = \frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2$.
L'algorithme s'écrit :

```
h ← 1
Tant que h > 0
    c ← h + 2
    Afficher c
    h ← h − pas
Fin Tant que
```

c) Avec pas = 0,1, on obtient :

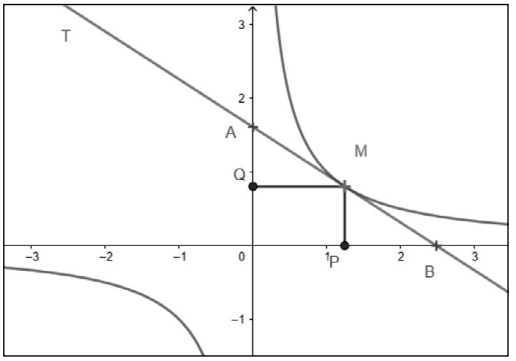
h	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
c	3	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1

2. a) Lorsque h tend vers 0, la droite T position limite des sécantes (OM) est la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de g au point O.
La limite de la pente c lorsque h tend vers 0 est égale à 2 donc une équation de T est $y = 2x$
b) Ce nombre est la pente de T, soit $g'(0) = 2$.

69 **a)** Pour h tel que $1 < 1 + h \leqslant 2$,
$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = -\frac{1}{1+h}$
b) Le programme calcule et affiche le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ pour des valeurs de h de plus en plus proches de 0.
h est initialisée à 1 et diminue de la valeur pas à chaque passage dans la boucle tant que $h > 0$.
c) On obtient les taux de variation successifs avec un pas de 0,01.

71 **a)** On conjecture que l'aire du triangle est constante égale à 2.
b) Si $a > 0$, l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$.
Si $a < 0$, 'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}(-2a) \times \left(-\frac{2}{a}\right) = 2$.

72 **a)**



b) On conjecture que l'aire du triangle OPMQ est constante égale à 1.

c) Si $a > 0$, l'aire du rectangle OPMQ est égale à $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Si $a < 0$, l'aire du rectangle OPMQ est égale à $(-a) \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 1$.

73 **1. a)** La pente de la sécante (OM) est 1.

b) La limite de ce taux lorsque h tend vers 0 avec $h > 0$ est égale à 1.

2. a) La pente de la sécante (ON) est -1.

b) La limite de ce taux lorsque h tend vers 0 avec $h < 0$ est égale à -1.

3. Le taux $\frac{f(h) - f(0)}{h}$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

74 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$,

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(1) = \frac{1}{2}$.

b) La limite de $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ est égale à $f'(1)$ lorsque h tend vers 0.

Donc pour h proche de 0 avec $h \neq 0$,

$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \approx \frac{1}{2}$.

c) Alors, pour h proche de 0, $f(1+h) - f(1) \approx \frac{1}{2}h$,

soit $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$.

d) $\sqrt{1{,}02} \approx 1 + 0{,}1$, $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}1$

$\sqrt{0{,}996} \approx 1 - 0{,}002$, $\sqrt{1{,}02} \approx 0{,}998$

75 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = 6x^2 - \frac{1}{x^2}$

b) Pour tout nombre réel $t > 0$,

$g'(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t}}$

76 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}(x^2 + 5) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times 2x$

$f'(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 + 5}{x^2}$

b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 - x^2 - 5}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2}$

77 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 2$,

$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ et

$g'(x) = \frac{4(x-2) - (4x-7)}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$.

Pour tout nombre réel $x \neq 2$, $f'(x) = g'(x)$.

b) Pour tout nombre réel $x \neq 2$,

$f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{4x-7}{x-2} = \frac{-4x+8}{x-2}$

$f(x) - g(x) = \frac{-4(x-2)}{x-2} = -4$.

Alors pour tout nombre réel $x \neq 2$,

$f'(x) - g'(x) = 0$, donc $f'(x) = g'(x)$.

78 Pour tout nombre réel $x > -2$,

$f'(x) = \frac{3(x+2) - 3x}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$ et $g'(x) = x + \frac{3}{2}$.

Alors $f'(0) = g'(0) = \frac{3}{2}$.

D'autre part $f(0) = g(0) = 0$, les deux courbes ont donc la même tangente en O.

79 Pour tout nombre réel $x \neq 3$,

$f'(x) = \frac{4(2x+1)(x-3) - (2x+1)^2}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \frac{(2x+1)[4(x-3) - (2x+1)]}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \frac{(2x+1)(2x-13)}{(x-3)^2}$

80 Pour tout réel $x > 0$,

$g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{(x+1) - 2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$

$g'(x) = \frac{(1-x)\sqrt{x}}{2x(x+1)^2}$

81 Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = 2 \times \frac{x^2 - 1}{x^2} \times \frac{x^2 + 1}{x}$

$f'(x) = 2 \times \frac{x^4 - 1}{x^3}$

82 **a)** Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 3 \times 2(2x - 5)^2 = 6(2x - 5)^2$

b) Pour tout nombre réel x,

$g'(x) = 4 \times (-3)(7 - 3x)^3 = -12(7 - 3x)^3$

c) Pour tout nombre réel $x \neq -\frac{1}{2}$,

$h'(x) = -3 \times 2(2x + 1)^{-4} = -6(2x + 1)^{-4}$

83 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1) = -1$.

b) Pour h proche de 0 avec $h \neq 0$,

$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \approx f'(1)$, soit $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \approx -1$

c) Pour h proche de 0 avec $h \neq 0$,

$f(1+h) - f(1) \approx -h$, soit $\frac{1}{1+h} - 1 \approx -h$,

$\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

d) $\frac{1}{1{,}003} \approx 1 - 0{,}003$, $\frac{1}{1{,}003} \approx 0{,}997$

$\frac{1}{0{,}999\,2} \approx 1 - (-0{,}000\,8)$, $\frac{1}{0{,}999\,2} \approx 1{,}000\,8$

84 **1.** La vitesse du coureur à l'instant t est donnée par $v(t) = d'(t) = 10 - \frac{1}{10}t$.

Donc $v(t)$ diminue proportionnellement au temps de course.

2. a) La vitesse du coureur s'annule à l'instant :

$t_1 = 100$ s.

b) La distance parcourue par le coureur est :

$d(100) = 10 \times 100 - \frac{100^2}{20} = 500$ m.

3. a) La vitesse moyenne du coureur pendant cette course est $\frac{500}{100} = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) La vitesse du coureur à l'instant $\frac{t_1}{2}$ est :

$v(50) = 10 - \frac{50}{10} = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

85 **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 8x$ donc $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, donc les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont parallèles.

b) Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = g'(x)$ équivaut à $8x = -\frac{1}{x^2}$, soit $x^3 = -\frac{1}{8}$.

Cette équation admet $-\frac{1}{2}$ pour unique solution, il n'existe pas de réel a différent de $-\frac{1}{2}$ tel que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse a soient parallèles.

86 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x$.

$2x = 3$ équivaut à $x = \frac{3}{2}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ est parallèle à la droite d.

87 Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2x$.

$2x = 10$ équivaut à $x = 5$.

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 5 a pour équation :

$y = f'(5)(x - 5) + f(5)$

$y = 10(x - 5) + 25$, $y = 10x - 25$.

Il s'agit de la droite d.

88 **1. a)** Pour tout nombre réel x,

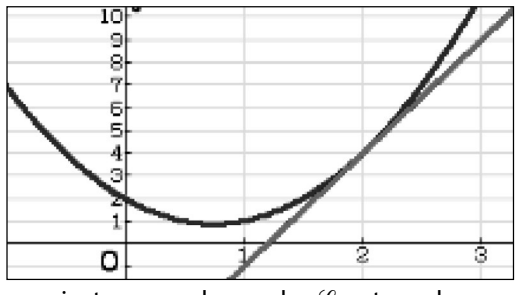
$f'(x) = 4x - 3$ donc $f'(2) = 5$.

Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = 5(x - 2) + 4$, $y = 5x - 6$

b)



On conjecture que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$f(x)-(5x-6)=(2x^2-3x+2)-(5x-6)$

$f(x)-(5x-6)=2x^2-8x+8$

$f(x)-(5x-6)=2(x-2)^2$

b) Pour tout nombre réel x, $2(x-2)^2 \geqslant 0$

donc $f(x) \geqslant 5x-6$.

Ainsi la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T.

89 Pour tout nombre réel, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x^2=2$.

Cette équation a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Les coordonnées des points A et B sont :

$$A\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ B\left(-\sqrt{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

90 a) Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a est :

$y=2a(x-a)+a^2$, soit $y=2ax-a^2$.

b) A appartient à la tangente T_a si, et seulement si, $-2=2a-a^2$, soit $a^2-2a-2=0$.

Cette équation a pour solutions $a'=1+\sqrt{3}$ et $a''=1-\sqrt{3}$.

c) Les équations des tangentes à $\mathscr{P}$ qui passent par A sont :

$T_{a'}$: $y=2\left(1+\sqrt{3}\right)x-4-2\sqrt{3}$

$T_{a''}$: $y=2\left(1-\sqrt{3}\right)x-4+2\sqrt{3}$

91 1. Une équation T est :

$$y=2(x-1)+1,\ \ y=2x-1.$$

2. a) Pour $h \neq 0$,

$y_M=(1+h)^2$ et $y_P=2(1+h)-1=1+2h$.

b) Pour h proche de 0, $y_M \approx y_P$, c'est-à-dire :

$$(1+h)^2 \approx 1+2h.$$

3. $(1{,}001)^2 \approx 1+0{,}002$, $(1{,}001)^2 \approx 1{,}002$,

$(0{,}995)^2 \approx 1-0{,}01$, $(0{,}995)^2 \approx 0{,}99$

92 a) La proposition est vraie.

En effet, pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

donc $f'(x)<0$.

b) La proposition est vraie.

En effet, $f'(1)=-1$.

c) La proposition est fausse.

En effet, $f'(-0{,}5)=-4$ et $f'(-0{,}5)<-1$.

93 a) La proposition est vraie.

En effet, si pour tout nombre réel x, $f(x)=g(x)$ alors $f'(x)=g'(x)$.

b) La proposition est fausse.

En effet f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ et $g(x)=x+1$ ont la même fonction dérivée et elles ne sont pas égales.

c) La proposition est vraie.

En effet, pour tout nombre réel $f(x)=1+g(x)$ donc $f'(x)=g'(x)$.

Organiser son raisonnement

94 Pour tout nombre réel a, $A(a\,;a^2)$, $H(0\,;a^2)$ et $H'(0\,;-a^2)$.

Une pente de la droite (AH') est : $\dfrac{2a^2}{a}=2a$.

(AH') passe par A et a pour pente $2a$, c'est donc la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

95 a) Pour tout nombre réel x,

$C'(x)=3x^2-200x+3\,000$.

b) Pour tout nombre réel x,

$C'(x) \leqslant 600$ équivaut à $3x^2-200x+2\,400 \leqslant 0$.

Les racines du polynôme $3x^2-200x+2\,400$ sont

$x_1=\dfrac{20\left(5+\sqrt{7}\right)}{3} \approx 50{,}97$ et

$x_2=\dfrac{20\left(5-\sqrt{7}\right)}{3} \approx 15{,}69$

La production de l'entreprise doit être comprise entre ces deux valeurs.

96 a) Pour tout nombre réel x,

$x^2+2x=-x^2+6x-2$ équivaut à

$2x^2-4x+2=0$, soit $2(x-1)^2=0$.

L'unique solution de cette équation est $x=1$.

Les deux courbes ont un unique point commun, le point A de coordonnées $(1\,;3)$.

b) f : $x \mapsto x^2+2x$ a pour dérivée f' : $x \mapsto 2x+2$ donc $f'(1)=4$.

g : $x \mapsto -x^2+6x-2$ a pour dérivée g' : $x \mapsto -2x+6$ donc $g'(1)=4$.

$f'(1)=g'(1)$ donc les deux courbes ont une tangente commune au point A.

97 **a)** La fonction Taux calcule et renvoie le taux de variation de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre a et $a+h$ avec $h \neq 0$.

b) On saisit le programme, on vérifie son fonctionnement.

c) Pour changer de fonction, on modifie la ligne 2 du programme.

98 Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

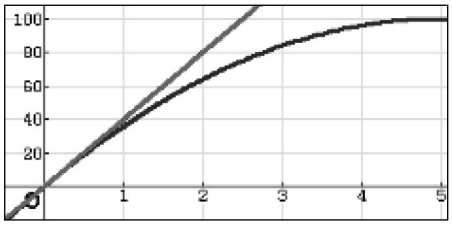
T_a passe par l'origine du repère si, et seulement si, $-af'(a) + f(a) = 0$, soit

$-a(2a-4) + a^2 - 4a + 5 = 0$,

$-a^2 + 5 = 0$, $a^2 = 5$.

On obtient alors les deux points de $\mathscr{C}$ dont les abscisses sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

99 **1.**



2. Pour $0 \leqslant t \leqslant 5$, $v(t) = -8t + 40$.

$v'(0) = 40$, $v'(2) = 24$, $v'(4) = 8$ et $v'(5) = 0$.

3. a) Voir le graphique.

La pente de T est la vitesse à l'instant $t = 0$.

b) La distance parcourue aurait été égale à :

$$40 \times 5 = 200 \text{ m}.$$

Il s'agit de l'ordonnée du point de T qui a pour abscisse 5.

100 Pour tout nombre réel x,

$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$.

$f(-1) = 0$ et $f'(-1) = 1$ donc une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est :

$$y = x + 1.$$

On étudie l'intersection de $\mathscr{C}$ et T :

Pour tout nombre réel x,

$f(x) = x + 1$ équivaut à $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, soit

$(x^2-1)^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$.

$\mathscr{C}$ et T se coupent en deux points : A$(-1\,;0)$ et B$(1\,;2)$.

D'autre part $f'(1) = 1$ donc T est aussi tangente à $\mathscr{C}$ au point B$(1\,;2)$.

101 Une équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = 2a(x-a) + a^2 + 1$

$y = 2ax - a^2 + 1$.

Une équation de la tangente T'_b à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse b est :

$y = g'(b)(x-b) + g(b)$

$y = -2b(x-b) - b^2 - 1$

$y = -2bx + b^2 - 1$.

Les tangentes T_a et T'_b sont confondues si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2a = -2b \\ -a^2 + 1 = b^2 - 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = -b \\ a^2 = 1 \end{cases}$$

On obtient donc deux tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

$T_1 = T'_{-1}$ tangente à $\mathscr{C}_1$ en A$(1\,;2)$ et à $\mathscr{C}_2$ en B$(-1\,;-2)$

$T_{-1} = T'_1$ tangente à $\mathscr{C}_1$ en A$(-1\,;2)$ et à $\mathscr{C}_2$ en B$(1\,;-2)$

102 Pour x et y réels,

$ax^2 + (1-2a)x + a = y$ équivaut à

$a(x^2 - 2x + 1) + x = y$

$a(x-1)^2 + x = y$

Pour $x = 1$ et $y = 1$, l'égalité précédente est vérifiée pour tout nombre réel a.

Ainsi toutes les paraboles $\mathscr{P}_a$ passent par le point E$(1\,;1)$.

La fonction $f : x \mapsto ax^2 + (1-2a)x + a$ a pour dérivée $f' : x \mapsto 2ax + 1 - 2a$ et $f'(1) = 1$.

Les paraboles $\mathscr{P}_a$ ont ainsi une tangente commune en E, cette droite passe par E et a pour pente 1.

103 La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A donc $f(0) = 1$ et par le point B$(2\,;5)$ donc $f(2) = 5$.

D'après le graphique, la droite d a pour pente 1 donc $f'(0) = 1$.

On résume les conditions de l'énoncé par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f(2) = 5 \end{cases}$

Pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x) = 2ax + b$.

Le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Finalement, pour tout nombre réel x,

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$.

104 Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 3px^2 + 2qx$.
La courbe de g a une tangente au point de coordonnées $(1\,;\,-1)$ parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si,

$$\begin{cases} g(1) = -1 \\ g'(1) = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} p + q = -1 \\ 3p + 2q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - \dfrac{3}{2}p = -1 \\ q = -\dfrac{3}{2}p \end{cases}, \quad \begin{cases} p = 2 \\ q = -3 \end{cases}$$

105 **a)** La pente de la tangente T est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2\,300 - 1200}{30 - 20} = 110.$$

b) Le coût marginal de production de la 21e tonne de médicament est assimilé à $C'(20)$, soit à la pente de la tangente T.
Il s'élève donc à 110 milliers d'euros.

106 **a)** Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2 - 3$ donc $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$.

D'autre part $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8}$.

Une équation de T est :

$$y = -\frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8}, \text{ soit } y = -\frac{9}{4}x + \frac{3}{4}$$

b) Pour tout nombre réel x,

$f(x) - \left(-\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{4}\right) = (x+1)\dfrac{(2x-1)^2}{4}$ d'après le calcul réalisé.

Pour $x \in]-\infty\,;\,-1]$, $x + 1 \leqslant 0$

donc $f(x) \leqslant -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{4}$.

Pour $x \in [-1\,;\,+\infty[$, $x + 1 \geqslant 0$

donc $f(x) \geqslant -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{4}$.

Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$ et au-dessus de T sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.
On peut remarquer que $\mathscr{C}$ et T se coupent aux points de coordonnées $(-1\,;3)$ et $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{3}{8}\right)$.

107 Pour $h > 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}.$$

Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ a pour limite 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

108 **a)** Si f est paire alors pour tout nombre réel x, $f(-x) = f(x)$ donc $-f'(-x) = f'(x)$,
soit $f'(-x) = -f'(x)$ et la fonction f' est impaire.

b) Si f est impaire alors pour tout nombre réel x, $f(-x) = -f(x)$ donc $-f'(-x) = -f'(x)$,
soit $f'(-x) = f'(x)$ et la fonction f' est paire.

109 **1. a)** Cette tangente a pour pente 0 donc $f'(0) = 0$.

Pour $x \in [-2\,;\,2]$, $f'(x) = 2ax + b$ donc $f'(0) = b$ et ainsi $b = 0$.

b) Le système $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = 1{,}5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} c = 2 \\ 4a + c = 1{,}5 \end{cases}$

soit $\begin{cases} c = 2 \\ a = -0{,}125 \end{cases}$

Donc, pour $x \in [-2\,;\,2]$,

$f(x) = -0{,}125x^2 + 2$.

2. a) Pour $x \in [-2\,;\,2]$,

$f(-x) = -0{,}125(-x)^2 + 2$

$f(-x) = -0{,}125x^2 + 2$

$f(-x) = f(x)$.

Donc f est une fonction paire.

b) La courbe $\mathscr{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. 1re méthode

La surface de la planche est $\text{OC} \times \text{OS} = 4\ \text{m}^2$

2e méthode

$f(1) = 1{,}875$

Pour $x \in [-2\,;\,2]$, $f'(x) = -0{,}25x$

donc $f'(1) = -0{,}25$.

Une équation de la droite (GH) est :

$y = -0{,}25(x - 1) + 1{,}875$, soit $y = -0{,}25x + 2{,}125$.

G a pour coordonnées $(0\,;\,2{,}125)$ et H a pour coordonnées $(2\,;\,1{,}625)$.

L'aire du trapèze OCHG est donc :

$$\frac{2{,}125 + 1{,}625}{2} \times 2 = 3{,}75\ \text{m}^2.$$

La forme la plus économique est celle du trapèze.

Exploiter ses compétences

110 Les informations de l'énoncé se traduisent par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(2) = 3 \\ f'(2) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

car la pente de la tangente (OC) au raccordement en O est égale à 0 et celle de la tangente (AB) en A au raccordement est $\frac{5}{2}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et le système s'écrit :

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 12a + 4b + c = \dfrac{5}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ 8a + 4b = 3 \\ 12a + 4b = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Ce système est équivalent :

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ 8a + 4b = 3 \\ 4a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + x^2.$$

111 Lorsque le caillou atteint la surface de l'eau $h(t) = 0$, soit $40 - 4{,}9t^2 = 0$, $t^2 = \frac{40}{4{,}9}$ et $t = \sqrt{\frac{40}{4{,}9}}$ (car $t \geqslant 0$).

La durée de la chute est donc $t \approx 2{,}9$ s.

La distance parcourue par le caillou à l'instant t est $d(t) = 4{,}9t^2$, la vitesse instantanée du caillou à l'instant t est donnée par $v(t) = 4{,}9 \times 2t = 9{,}8t$.

Donc la vitesse du caillou lorsqu'il atteint la surface de l'eau est :

$$v\left(\sqrt{\frac{40}{4{,}9}}\right) = 9{,}8 \times \sqrt{\frac{40}{4{,}9}} = 28 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

112 Pour une production de q composants $(0 < q \leqslant 200)$ le coût moyen est :

$$\frac{C(q)}{q} = \frac{1}{3\,000}q^2 + \frac{200}{q}$$

Avec un traceur de courbes, on trace les courbes représentatives des fonctions $q \mapsto \frac{C(q)}{q}$ et $q \mapsto 8$.

On obtient $\frac{C(q)}{q} \leqslant 8$ pour $26 \leqslant q \leqslant 140$.

Le coût marginal est donné par $C'(q) = \frac{1}{1\,000}q^2$ pour $0 \leqslant q \leqslant 200$.

$C'(q) \leqslant 8$ équivaut à $q^2 \leqslant 8\,000$, c'est-à-dire $q \leqslant 89$.

La quantité q de composants à produire doit donc être telle que $26 \leqslant q \leqslant 89$.

113 On note a l'abscisse du point M $(a > 0)$.

M a pour coordonnées $(a\,;0)$ et H a pour coordonnées $(0\,;26)$.

La pente de la droite (HM) est $-\frac{26}{a}$ et une équation de cette droite est $y = -\frac{26}{a}x + 26$.

On étudie l'intersection de la droite (HM) et de la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = -x^2 + 25$.

Pour cela, on résout l'équation :

$-x^2 + 25 = -\frac{26}{a}x + 26$, c'est-à-dire :

$x^2 - \frac{26}{a}x + 1 = 0$

On obtient $\Delta = \left(-\frac{26}{a}\right)^2 - 4 = \frac{676 - 4a^2}{a^2}$

$\Delta = \frac{4(169 - a^2)}{a^2}$.

• Si $0 < a < 13$ alors $\Delta > 0$, (HM) et $\mathscr{C}$ se coupent en deux points.

• Si $a = 13$ alors $\Delta = 0$, (HM) et $\mathscr{C}$ se coupent en un seul point.

• Si $a > 13$ alors $\Delta < 0$, (HM) et $\mathscr{C}$ ne se coupent pas.

Donc l'observateur doit se placer à une distance minimale de $13 - 5 = 8$ m du pied du terril pour apercevoir l'extrémité du bâton.

Remarque : lorsque $a = 13$, la droite (HM) est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.