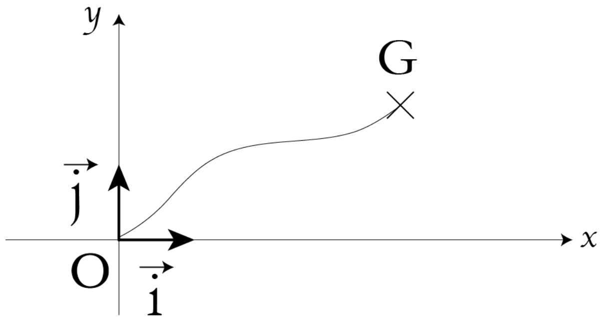
vecteurs position, vitesse et accélération

On considère un objet de centre de gravité G en mouvement dans le plan rapporté à un repère orthonormé fixe $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant une base de vecteurs fixes du plan.

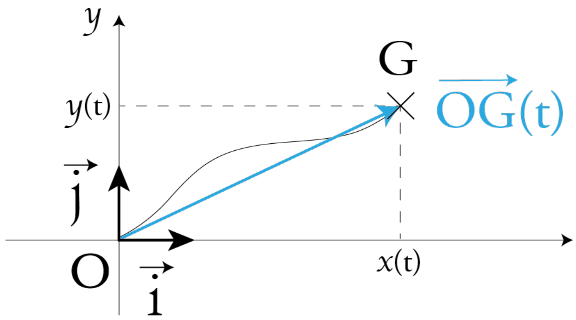
Objet : on souhaite étudier le mouvement de l'objet en nous intéressant au déplacement de son centre de gravité G en fonction du temps.



vecteur position

On appelle **vecteur position** de l'objet G le vecteur $\overrightarrow{OG}$.

Si l'objet repéré par G se déplace, alors le vecteur $\overrightarrow{OG}$ n'est pas constant. On dit que $\overrightarrow{OG}$ varie en fonction du temps et on le note généralement : $\overrightarrow{OG}(t)$. En définitive, ce vecteur n'est autre qu'une "fonction vectorielle" du temps.



Sur la figure, on a : $\overrightarrow{OG}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées du point G dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On écrira par conséquent : $\overrightarrow{OG}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

vecteur vitesse

On appelle **vecteur vitesse** de l'objet G le vecteur $\vec{V}(t)$ tel que $\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}}$.

Le vecteur vitesse est le vecteur obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur position.

Cette opération est simple à réaliser lorsque la base est fixe. En effet :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}} = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath}$$

où $x'(t)$ et $y'(t)$ sont les composantes respectives suivant les axes (Ox) et (Oy) du vecteur vitesse du point G dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On peut donc aussi noter :

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath}$$

avec : $V_x(t) = x'(t)$ et $V_y(t) = y'(t)$.

<u>Remarque</u> : il est possible de ne pas systématiquement écrire (t) à la condition toutefois de ne jamais oublier que position et vitesse dépendent du temps.

On écrira ainsi :

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

On écrira également : $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Mais certains écriront plus simplement : $\vec{V} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

vecteur accélération

On appelle **vecteur accélération** de l'objet G le vecteur $\vec{a}(t)$ tel que $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}^2}$.

Le vecteur accélération est le vecteur obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse, c'est-à-dire obtenu en dérivant deux fois le vecteur position.

On a donc :

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}^2} = x''(t)\vec{\imath} + y''(t)\vec{\jmath}$$

où $x''(t)$ et $y''(t)$, dérivées secondes de $x(t)$ et $y(t)$, sont les composantes respectives suivant les axes (Ox) et (Oy) du vecteur accélération du point G dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On peut donc aussi noter :

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath}$$

avec : $a_x(t) = x''(t)$ et $a_y(t) = y''(t)$.

On écrira ainsi :

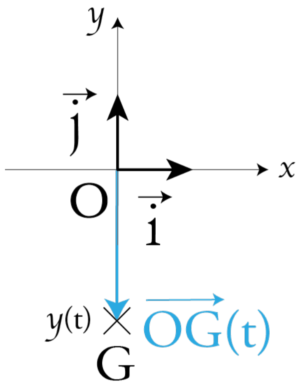
$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

On écrira également : $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Enfin, certains écriront : $\vec{a} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Application : problème de la chute des corps

Considérons un objet en chute libre repéré par son centre de gravité G dans le repère orthonormé fixe $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant une base de vecteurs fixes du plan.



En posant $y(t)$ distance (positive) entre O et G, il vient trivialement :

$$\overrightarrow{OG}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y(t) \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{\imath}, \vec{\jmath}).$$

D'où : $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y'(t) \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Enfin : $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y''(t) \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Or, nous savons que l'accélération d'un objet en chute libre est l'accélération g de la pesanteur et que le vecteur pesanteur est ici : $\vec{g} = -g\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$.

Écrire l'égalité $\vec{a}(t) = \vec{g}$ équivaut à écrire : $\begin{pmatrix} 0 \\ -y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$, d'où : $y''(t) = g$.

En primitivant, nous obtenons successivement :

$y'(t) = gt + a$ où a est une constante, et

$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + at + b$ où b est une constante.

La connaissance de ce que l'on nomme les **conditions initiales** permet de déterminer les constantes a et b. En général, à l'instant $t = 0$, G et O sont confondus, donc $y(0) = 0$, et la vitesse initiale est nulle, donc : $y'(0) = 0$.

On a : $y(0) = 0 \implies a = 0$

De plus : $y'(0) = 0 \implies b = 0$.

Conclusion : La loi de la chute des corps est :

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Ainsi, si un objet chute d'une hauteur h égale à 10 mètres, alors le temps de chute sera donné par la relation :

$$h \approx \frac{1}{2}gt^2$$

D'où : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \sqrt{\frac{2\times10}{9,81}} \approx 1,43$ seconde.