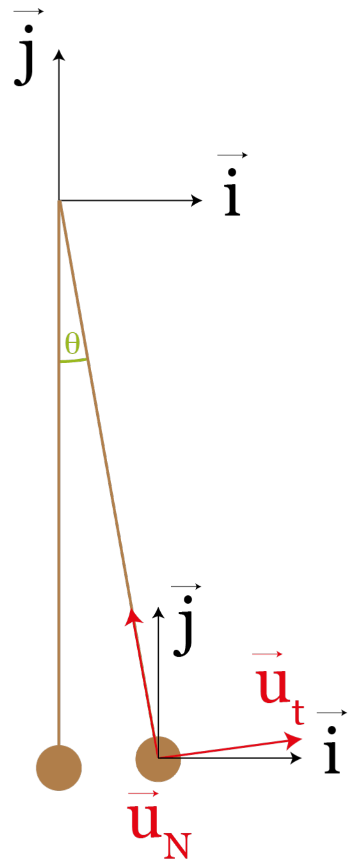
Pendule oscillant

On considère la figure ci-dessous, qui représente une masse m suspendue à un support par un fil de longueur ℓ. La masse est écartée de sa position d'équilibre, puis est relâchée. On souhaite modéliser le mouvement du pendule.



1. Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{u_N}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à l'aide de l'angle θ.
2. Déterminer la dérivée en fonction du temps des vecteurs $\overrightarrow{u_T}$ et $\overrightarrow{u_N}$ dans la base $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$.
3. En déduire que : $\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{u_N} = -\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_T} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_N}$.
4. Par application de la relation fondamentale de la dynamique à la masse m suspendue, démontrer que :

$$\begin{pmatrix} m\ell\ddot{\theta} \\ m\ell\,\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la loi régissant le mouvement du pendule est déterminée par l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ où $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ lorsque les oscillations du pendule sont faibles.
6. Montrer que : $\theta(t) = \theta_0 \times \cos\omega t$.