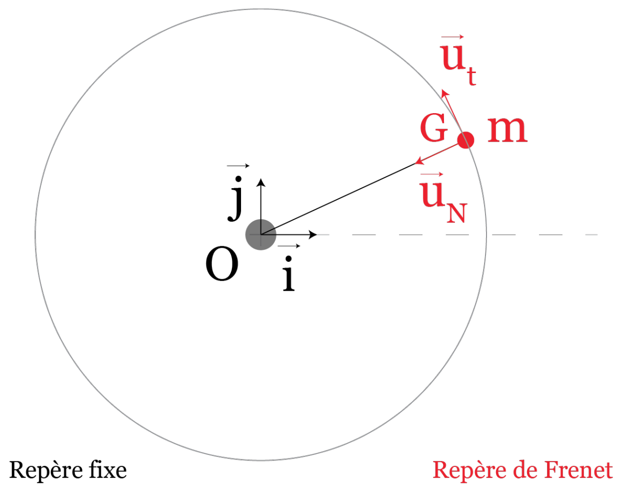
Mouvement orbital

On considère un satellite géostationnaire de masse m soumis dans le repère terrestre à la force gravitationnelle exercée par la Terre. La force d'attraction exercée par la Terre est :

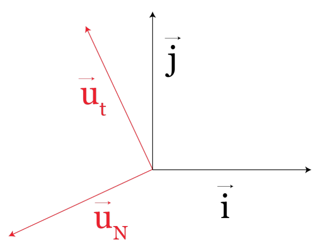
$$\vec{F} = G.\frac{M.m}{r^2}.\overrightarrow{u_N}$$

où M est la masse de la Terre, égale à environ 5,972 × 10^{24} kg, et G est la constante gravitationnelle égale à 6,67 × 10^{-11} N.m²/kg².

Le mouvement orbital d'un satellite autour de la Terre est, en première approximation, assimilable à un mouvement circulaire. Pour étudier un tel mouvement, il est intéressant d'utiliser un repère mobile appelé repère de FRENET, centré sur le satellite en rotation.



Les vecteurs $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_N}$ étant mobiles, leur dérivation n'est pas une opération neutre, contrairement aux cas des vecteurs $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$, supposés fixes.



On rappelle en particulier que : $\frac{d\overrightarrow{u_T}}{dt} = \omega\overrightarrow{u_N}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_N}}{dt} = -\omega\overrightarrow{u_T}$.

1. Déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération du satellite.
2. Exprimer vectoriellement la seconde loi de Newton.
3. En déduire que : $V^2 = \frac{GM}{R}$.
4. On sait que $\omega = 2\pi N$ où N est le nombre de tours par seconde du satellite autour de la terre et ω est la vitesse de rotation du satellite en radians par seconde.
   Déterminer N.
5. Sachant que $V = R\omega$, montrer que : $R^3 = \frac{GM}{4\pi^2 N^2}$.
6. Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 400 km, en déduire que l'altitude à laquelle doit graviter un satellite géostationnaire est d'environ 36 000 km.