Dérivation de la composée de deux fonctions

Position du problème

Les règles de dérivation découvertes et apprises en classe de première et utilisées depuis le début de l'année en classe de terminale s'avèrent insuffisantes pour dériver des fonctions autres que les fonctions usuelles ou les fonctions obtenues par simple produit ou quotient de deux fonctions usuelles.

La capacité à dériver une fonction obtenue par composition de deux fonctions usuelles constituerait un sérieux progrès dans le cadre de l'étude de fonctions "compliquées".

Résultat admis

Considérons la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ définie sur un intervalle I, ainsi que les fonctions u définie sur I et v définie sur l'intervalle J contenant tous les valeurs de u(x), telles que :

f(x) = v(X) = v(u(x)) = $(v \circ u)(x)$.

f est une fonction dite composée et $f = v \circ u$.

$$x \xmapsto{\quad\quad\quad f \quad\quad\quad} \mathrm{f}(x)$$

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & & \mathrm{J} \\ x & \xmapsto{u} & u(x) \\ & & \mathrm{X} \xmapsto{v} v(\mathrm{X}) \end{array}$$

La dérivée de l'expression $(v \circ u)(x)$ est calculable via la formule admise :

$$(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

Exemple 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto e^{x^2}$ définie de l'ensemble des réels vers l'ensemble des réels strictement positifs.

$$x \xmapsto{\quad\quad\quad f \quad\quad\quad} \exp(x^2)$$

$$x \xmapsto{\;u\;} x^2 \xmapsto{\;\exp\;} \exp(x^2)$$

On a : $f(x) = \exp(x^2) = exp(u(x)) = (exp \circ u)(x) = (v \circ u)(x)$ où v est la fonction exponentielle.

Donc $f(x) = (v \circ u)(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

D'où : $f'(x) = (v \circ u)'^{(x)} = v'(u(x)) \times u'(x) = e^{x^2} \times 2x = 2xe^{x^2}$

<u>Remarque</u> : la formule de dérivation admise nous permet de dériver une fonction inhabituelle, obtenue par la composée de deux fonctions connues et largement étudiées.

exemple 2

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 1}$, composée à partir de la fonction polynomiale qui, à tout réel x, associe $x^2 + 1$ (notée ci-dessous u), et de la fonction racine carrée, notée v.

$$x \xmapsto{\quad\quad\quad f \quad\quad\quad} \sqrt{x^2+1}$$

$$x \xmapsto{u} x^2+1 \xmapsto{v} \sqrt{x^2+1}$$

On éa : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = v(x^2 + 1) = v(u(x)) = (v \circ u)(x)$.

Déterminons f '(x)

On a : $f(x) = (v \circ u)(x)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

D'où : $f'(x) = (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$