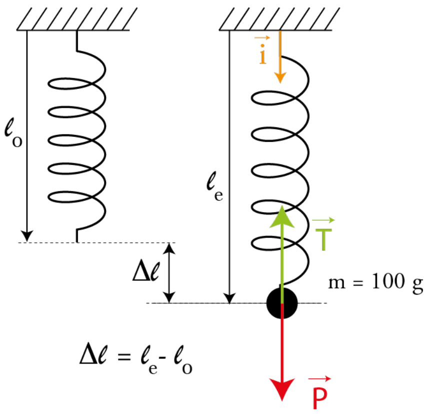
oscillations sinusoïdales

On considère un ressort élastique dont le coefficient de raideur ou d'élasticité est k (en N/m), ce qui signifie que la tension qui s'exerce sur le ressort lorsqu'on l'allonge de $\Delta\ell$ est égale à $k\Delta\ell$ (la tension d'un ressort est en effet proportionnelle à l'allongement du ressort si l'on n'excède pas une certaine limite).
Autrement dit : $T = k\Delta\ell$.

Au repos, on suppose que le ressort possède une longueur ℓ_0. Dans tout le problème, on néglige la masse du ressort
On attache à l'extrémité inférieure du ressort un objet de masse m., d'où un allongement du ressort. A l'équilibre, la nouvelle longueur du ressort est notée ℓ_e.

1. Déterminons l'allongement du ressort $\Delta\ell$ à l'équilibre.



A l'équilibre, la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur l'extrémité du ressort est le vecteur nul. Donc :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

Or : $\vec{P} = mg\vec{\imath}$ et $\vec{T} = -T\vec{\imath}$ où : $T = k\Delta\ell$.
On obtient donc :

$$mg\vec{\imath} - T\vec{\imath} = \vec{0}$$

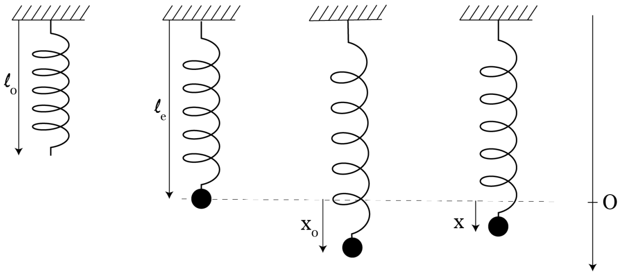
D'où : $(mg - T)\vec{\imath} = \vec{0}$
Ainsi : $mg - T = 0$, d'où : $mg = T = k\Delta\ell$
En résultat, l'allongement du ressort $\Delta\ell$ à l'équilibre, lorsque soumis à une masse m, est donné par l'expression :

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k}$$

2. L'objet étant à l'équilibre, on a donc la relation :

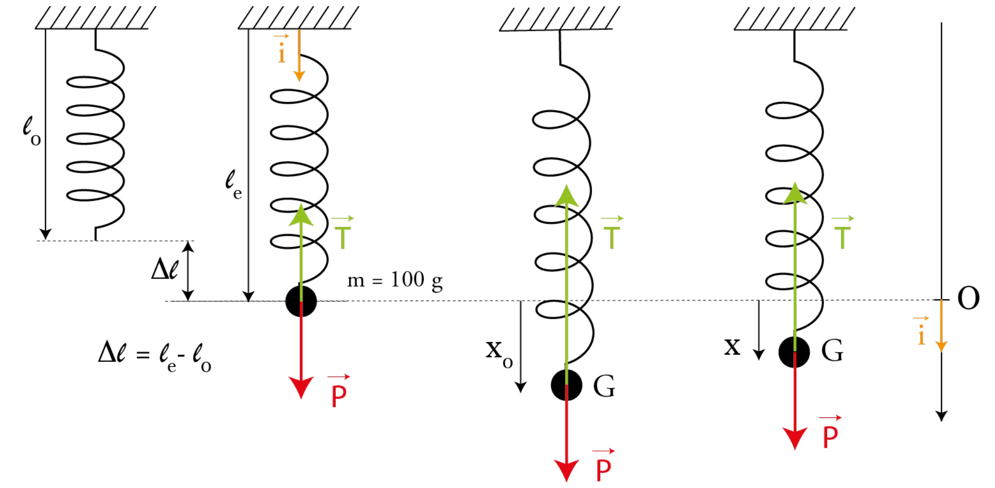
$$\ell_e - \ell_0 = \frac{mg}{k}$$

On exerce maintenant une traction sur l'objet de masse m, allongeant ainsi le ressort de x_0 par rapport à la position d'équilibre. Puis, on relâche l'objet, observant une oscillation de l'objet autour de la position d'équilibre repérée par le point O. on note x la position de l'objet par rapport à l'origine O.



3. Traduisons la situation par un schéma et exprimons la relation fondamentale de la dynamique :

On choisit idéalement le repère $(O;\vec{\imath})$ pour exprimer les vecteurs considérés et modéliser le déplacement de l'extrémité du ressort, l'origine O correspondant à la position de l'extrémité du ressort à l'équilibre.



État relâché État à l'équilibre État étiré d'une longueur x au-delà de l'équilibre

<u>Bilan des forces</u>

$$\vec{P} = mg\vec{\imath}$$
et
$$\vec{T} = -T\vec{\imath} \text{ où } T = k(\Delta\ell + x).$$

<u>Relation fondamentale de la dynamique</u>

$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$ est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}$ qui est, lui-même, la dérivée du vecteur position de l'extrémité du ressort où est accrochée la masse m (centre de gravité G).

Qu'appelle-t-on vecteur position ?
Il s'agit simplement du vecteur : $\overrightarrow{OG}$ qui indique la position du centre de gravité de la masse m, confondue ici avec l'extrémité du ressort.
Le point G étant mobile, le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur qui varie en fonction du temps t.
On notera généralement ce vecteur $\overrightarrow{OG}(t)$.

Ainsi : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}(t)}{dt}$

Enfin : : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OG}(t)}{dt^2}$

Exprimons $\overrightarrow{OG}(t)$ dans la base choisie.
On a : $\overrightarrow{OG}(t) = x\vec{\imath}$ où x dépend du temps et est donc fonction du temps. On peut par conséquent noter $x(t)$ ou x l'abscisse du point G par rapport à O.

Calculons $\vec{V}$ et $\vec{a}$.
On a : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}(t)}{dt} = \dfrac{d(x\vec{\imath})}{dt} = \dfrac{d(x)}{dt}\vec{\imath} = x'(t)\vec{\imath}$ car $\vec{\imath}$ est un vecteur constant.
De même : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dfrac{d(x'(t)\vec{\imath})}{dt} = x"(t)\vec{\imath}.$

Traduction de la relation fondamentale de la dynamique

On a :

$$m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow mx''(t)\vec{\imath} = mg\vec{\imath} - T\vec{\imath} \text{ où } T = k(\Delta\ell + x).$$

D'où :

$$mx''(t) = mg - T$$

C'est-à-dire :

$$mx''(t) = mg - k(\Delta\ell + x(t))$$

D'où :

$$mx''(t) + kx(t) = mg - k(\Delta\ell) \text{ où } \Delta\ell = \frac{mg}{k}$$

En résultat :

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

Cette relation, qui fait intervenir la fonction x dépendant du temps et sa dérivée seconde, est appelée équation différentielle du second ordre.

4. La position de l'objet est donc solution de l'équation différentielle : $x'' + \frac{k}{m}x = 0$, obtenue en divisant les membres de gauche et de droite dans l'équation différentielle précédente.

5. En pose $\omega^2 = \frac{k}{m}$, l'équation différentielle s'écrit :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Soit x la fonction définie par $x(t) = A \times cos(\omega t + \varphi)$.

On a :

$$x'(t) = A \times (-\omega)\, sin(\omega t + \varphi) = -A\omega sin(\omega t + \varphi)$$

De plus :

$$x''(t) = -A\omega(\omega)\, cos(\omega t + \varphi) = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi)$$

Donc :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi) + \omega^2(A \times cos(\omega t + \varphi)) = 0$$

La fonction x définie par $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$ est donc une solution de l'équation différentielle régissant le mouvement du ressort : $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

Déterminons la valeur des paramètres A et φ en traduisant les conditions initiales du problème.

A t = 0, on a : $x = x(0) = x_0$. Or : $x(0) = A\, cos(\varphi)$, donc : $x_0 = A\, cos(\varphi)$.
De plus, à t = 0, l'extrémité du ressort est relâchée avec une vitesse nulle.

Or la vitesse est la dérivée de la position. Donc : $x'(0) = 0$.
Comme $x(t) = A \times cos(\omega t + \varphi)$, on sait que : $x'(t) = -A\,\omega \times sin(\omega t + \varphi)$.
Donc : $x'(0) = -A\,\omega\, sin(\varphi)$.
$x'(0)$ étant nulle et A et ω étant non nuls, il en découle nécessairement que $sin(\varphi) = 0$.
Par conséquent : $\varphi = 0$.

6. En conséquence, la position x de l'objet en fonction du temps après avoir étiré le ressort d'une longueur x_0 est déterminée par la relation très simple :

$$x(t) = x_0 cos(\omega t) \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7. Modélisation des oscillations du ressort dans le cas où m = 100g, k = 20 N/m, g = 10 N/m.s² et x_0 = 3 cm.

$$x(t) = 0{,}03 cos(\omega t) \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{20}{0{,}1}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$