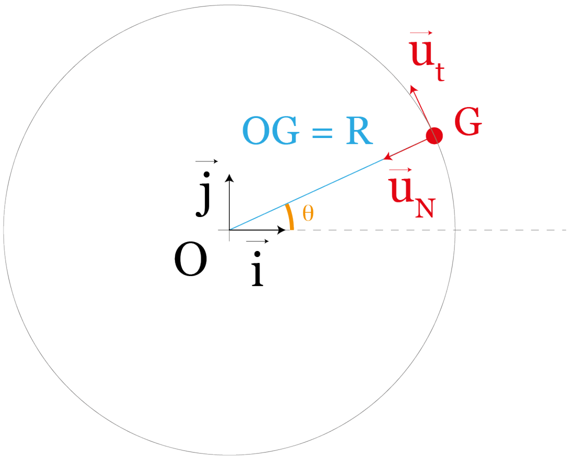
Repère de FRENET

On considère un objet de centre de gravité G en rotation autour d'un centre O dans le plan rapporté à un repère orthonormé fixe $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant une base de vecteurs fixes du plan.

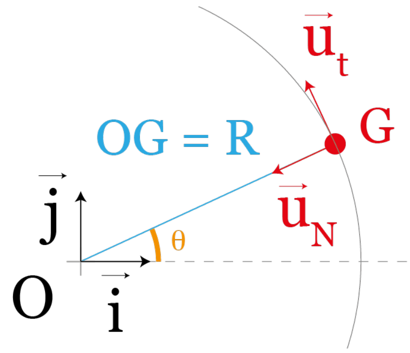
Objet : on souhaite étudier le mouvement de rotation de l'objet en nous intéressant au déplacement de son centre de gravité G en fonction du temps.



Vecteur position

Le **vecteur position** de l'objet G est le vecteur $\overrightarrow{OG}$.

Dans la base mobile $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$, on a trivialement : $\overrightarrow{OG} = -OG\overrightarrow{u_N} = -R\overrightarrow{u_N}$



On écrira par conséquent : $\overrightarrow{OG}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \end{pmatrix}$ dans la base tournante $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$.

Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** de l'objet G est le vecteur $\vec{V}(t)$ tel que $\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}}$. Ainsi :

$$\vec{V}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(-R\overrightarrow{u_N})}{\mathrm{dt}} = -R\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{u_N})}{\mathrm{dt}} = -R\left(-\dot{\theta}\overrightarrow{u_T}\right) = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_T} = R\omega\overrightarrow{u_T}$$

où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse de rotation du mobile.

On écrira : $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} R\omega \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base tournante $(\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$.

<u>Remarque</u>

Nous savons que $\dot{\theta} \ = \omega$ est la vitesse de rotation du mobile.

Or, sur un cercle, la distance D balayée lorsqu'un angle θ (en radians) est parcouru est égale à $R\theta$.

$$D(t) = R\theta(t)$$

Donc, la vitesse de déplacement sur le cercle est logiquement :

$$V(t) = \frac{dD(t)}{dt} = R\theta'(t) = R\omega$$

où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse de rotation du mobile.

vecteur accélération

Le **vecteur accélération** de l'objet G est le vecteur $\vec{a}(t)$ tel que $\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}(t)}{\mathrm{dt}^2}$.

On a donc :

$$\vec{a}(t) \ = \frac{\mathrm{d}\vec{V}(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\left(R\dot{\theta}\overrightarrow{u_T}\right)}{\mathrm{dt}} = R\,\frac{\mathrm{d}\left(\dot{\theta}\overrightarrow{u_T}\right)}{\mathrm{dt}}$$

Or, on a : $\frac{\mathrm{d}\left(\dot{\theta}\overrightarrow{u_T}\right)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\dot{\theta})}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{u_T} + \dot{\theta}\,\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{u_T})}{\mathrm{dt}} = \ddot{\theta}\overrightarrow{u_T} + \dot{\theta}\left(\dot{\theta}\overrightarrow{u_N}\right) = \ddot{\theta}\overrightarrow{u_T} + \dot{\theta}^2\overrightarrow{u_N}$

D'où : $\vec{a}(t) \ = \mathrm{R}\ddot{\theta}\overrightarrow{u_T} + R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_N}$

On écrira en conséquence :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{R}\ddot{\theta} \\ R\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N}).$$

Or, on sait que : $V(t) = R\omega = R\dot{\theta}$, donc : $R\ddot{\theta} \ = \frac{dV}{dt}$

Sachant que : $V(t) = R\omega = R\dot{\theta}$, il vient aussi : $\dot{\theta}^2 \ = \frac{V^2}{R^2}$.

D'où : $R\dot{\theta}^2 \ = R \times \frac{V^2}{R^2} = \frac{V^2}{R}$

En définitive, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dV}{dt} \\ \frac{V^2}{R} \end{pmatrix} \text{ dans la base tournante } (\overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N}).$$

On a : $\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{V^2}{R}\overrightarrow{u_N}$