Dérivation d'une fonction composée

Position du problème

Nous avons étudié au lycée un certain nombre de fonctions parmi lesquelles les fonctions affines et les fonctions trigonométriques sin, cos et tan.

Composer une fonction affine et une fonction trigonométrique est chose très fréquente en sciences physiques et revient à réaliser l'opération ci-dessous :

Illustration par un exemple

Considérons la fonction $h: t \longmapsto sin(\omega t + \varphi)$ définie de l'ensemble des réels vers l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

$$t \xmapsto{\qquad\qquad h \qquad\qquad} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$t \xrightarrow{\ g\ } \omega t + \varphi \xrightarrow{\ f\ } \sin(\omega t + \varphi)$$

On écrit que : $h(t) = sin(\omega t + \varphi) = f(\omega t + \varphi) = f\big(g(t)\big) = (f \circ g)(t)$.

On dit que fonction h est la composée des fonctions f et g et on écrit $h = f \circ g$, f étant la fonction sinus et g étant la fonction affine qui à tout réel t associe $\omega t + \varphi$.

<u>Remarque</u> :

le symbole de l'opération de composition $\circ$ se lit "rond".

L'opération de composition n'est pas une opération commutative. On ne peut généralement pas écrire $f \circ g = g \circ f$.

En effet, ici , $(g \circ f)(t) = g\big(f(t)\big) = g\big(sin(t)\big) = \omega\big(sin(t)\big) + \varphi$

Résultat général sur la dérivation d'une fonction composée

Considérons la fonction $h: x \longmapsto h(x)$ définie sur un intervalle I, ainsi que les fonctions g définie sur I et f définie sur l'intervalle J contenant toutes les valeurs de g(x), telles que :

h(x) = f(X) = f(g(x)) = $(f \circ g)(x)$.

h est une fonction dite composée et $h = f \circ g$.

$$x \xmapsto{\qquad\qquad h \qquad\qquad} h(x)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & & \mathrm{J} & & \\ x & \xmapsto{\ g\ } & g(x) & & \\ & & X & \xmapsto{\ f\ } & f(X) \end{array}$$

La dérivée de l'expression $(f \circ g)(x)$ peut être déterminée à partir de la formule classique :

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)}$$

Application

On considère la fonction h définie par l'expression $h(t) = sin(\omega t + \varphi)$.

On a : $h(t) = (f \circ g)(t)$ où f est la fonction sinus et g est la fonction affine qui est définie par l'expression $g(t) = \omega t + \varphi$.

Les dérivées des fonctions f et g sont définies par :

$$f'(t) = cos(t)$$

$$g'(t) = \omega$$

Par application de la formule de dérivation de deux fonctions composées, on obtient :

$$h'(t) = f'(g(t)) \times g'(t)$$

Ainsi : $h'(t) = \ f'(\omega t + \varphi) \times \omega = cos(\omega t + \varphi) \times \omega = \omega \, cos(\omega t + \varphi)$

Exercice 1

Soit la fonction h définie par l'expression $h(t) = cos(\omega t + \varphi)$.

1. Démontrer que $h'(t) = -\omega \, sin(\omega t + \varphi)$.
2. Démontrer que $h"(t) = -\omega^2 \, cos(\omega t + \varphi)$.
3. Démontrer que h est solution de l'équation différentielle $y" + \omega^2 \, y = 0$.

Exercice 2

Soit la fonction h définie par l'expression $h(t) = tan(\omega t + \varphi)$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction tangente.
2. Démontrer que $h'(t) = \omega \, (1 + tan^2(\omega t + \varphi)) = \frac{\omega}{cos^2(\omega t+\varphi)}$.

Exercice 3

Soit la fonction h définie par l'expression $h(t) = \lambda \, sin(\omega t + \varphi) + \mu \, cos(\omega t + \varphi)$.

1. Déterminer $h'(t)$ et $h"(t)$.
2. Montrer que h est solution de l'équation différentielle $y" + \omega^2 \, y = 0$.