Méthodologie et dérivation

1. Dérivation d'un produit de deux fonctions

Certaines fonctions apparaissent comme des produits de fonctions et ne peuvent être dérivées qu'à l'aide d'une formule de dérivation spécifique.
La formule de dérivation d'un produit est :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Dire que $f = uv$ revient à dire que $f(x) = uv(x)$ où $uv(x) = u(x)v(x)$.
En conséquence : $f'(x) = (uv)'(x) = (u'v + uv')(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Application 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)(2x - 3)$. Déterminer $f'(x)$.

Application 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x}$. Déterminer $f'(x)$.

Application 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)e^x$. Déterminer $f'(x)$.

2. Dérivation d'un quotient de fonctions

La formule de dérivation d'un quotient est :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dire que $f = \frac{u}{v}$ revient à dire que $f(x) = \frac{u}{v}(x)$ où $\frac{u}{v}(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

En conséquence : $f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

Application 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Déterminer $f'(x)$.

Application 5

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Déterminer $f'(x)$.

3. Dérivation du carré d'une fonction

Il est parfois intéressant d'utiliser une formule compacte de dérivation dans le cas de la dérivation du carré d'une fonction.

La formule de dérivation du carré d'une fonction est :

$$(u^2)' = 2uu'$$

Dire que $f = u^2$ revient à dire que $f(x) = u^2(x)$ où $u^2(x) = \big(u(x)\big)^2$.
En conséquence : $f'(x) = 2u(x)u'(x)$.

Application 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3(4x-5)^2$. Déterminer $f'(x)$.

Application 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}(3x^2-1)^2$. Déterminer $f'(x)$.

4. Dérivation de l'inverse d'une fonction

La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction u est :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Dire que $f = \frac{1}{u}$ revient à dire que $f(x) = \frac{1}{u}(x)$ où $\frac{1}{u}(x) = \frac{1}{u(x)}$.

En conséquence : $f'(x) = \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = \left(-\frac{u'}{u^2}\right)(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$.

Application 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. Déterminer $f'(x)$.

Application 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Déterminer $f'(x)$.